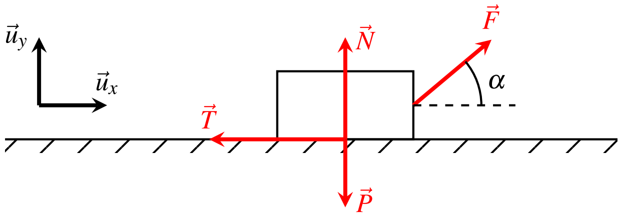
Corrigé DM9

Exercice : Tir à la corde

1.



1. On étudie l'adhérence de la caisse sur le sol, elle est donc supposée **immobile**. Elle est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$ du sol ainsi qu'à la force de traction $\vec{F}$ exercée par la corde. On applique le principe fondamental de la statique à la caisse en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}=\vec{0}$. On projette dans la base d'étude :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F\cos\alpha \\ F\sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \|\vec{T}\| = F\cos\alpha \\ \|\vec{N}\| = mg - F\sin\alpha \end{cases}$$

D'après la première loi de Coulomb l'adhérence est maintenue tant que :

$$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\| \iff F\cos\alpha < f(mg - F\sin\alpha) \iff \boxed{F < F_{\text{min}} = \frac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha}}$$

2. L'angle plus favorable est celui pour lequel la force F_{min} est la plus faible. On doit donc résoudre l'équation $F'_{\text{min}}(\alpha) = 0$:

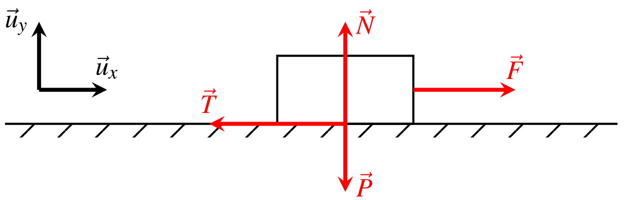
$$-fmg\frac{-\sin\alpha + f\cos\alpha}{(\cos\alpha + f\sin\alpha)^2} = 0 \iff \sin\alpha = f\cos\alpha \iff \boxed{\alpha = \arctan f = 27^\circ}$$

3. Dans le cas le plus favorable on trouve $\boxed{F_{\text{min}} = 657\,\text{N}}$. Si la force est horizontale ($\alpha = 0$) on trouve $\boxed{F_{\text{min}} = fmg = 735\,\text{N}}$. On compare ces deux valeurs en calculant leur écart relatif :

$$\frac{\Delta F_{\text{min}}}{F_{\text{min}}} = \frac{735-657}{735} = 0{,}11$$

En tirant sur la corde légèrement vers le haut on peut diminuer la force de traction minimale d'environ **10%** par rapport au cas horizontal.

4.



On applique le principe fondamental de la dynamique à la caisse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P}+\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}$. La caisse se déplace à l'horizontale sur le sol donc son vecteur vitesse est $\vec{v} = v\vec{u}_x$ et son vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{\text{d}v}{\text{d}t}\vec{u}_x$ (pas de composante sur $\vec{u}_y$). On projette dans la base d'étude :

$$\begin{vmatrix} m\frac{\text{d}v}{\text{d}t} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_0 - \alpha v \\ 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} m\frac{\text{d}v}{\text{d}t} = F_0 - \alpha v - \|\vec{T}\| \\ \|\vec{N}\| = mg \end{cases}$$

La caisse glisse donc on peut appliquer la deuxième loi de Coulomb : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg$. On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$:

$$m\frac{\text{d}v}{\text{d}t} = F_0 - \alpha v - fmg \iff \boxed{\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = \frac{F_0 - fmg}{m}}$$

On identifie le temps caractéristique : $\boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$. La vitesse limite est constante donc elle est solution de l'équation sans dérivée :

$$\frac{\alpha}{m}v_\ell = \frac{F_0 - fmg}{m} \iff \boxed{v_\ell = \frac{F_0 - fmg}{\alpha}}$$

5. Solution homogène : $v_h(t) = A\text{e}^{-t/\tau}$.
Solution particulière : $v_p = v_\ell$.
Solution générale : $v(t) = A\text{e}^{-t/\tau} + v_\ell$.
Au début du glissement la caisse est à l'arrêt donc $v(0) = 0$. On en déduit que $A = -v_\ell$, d'où :

$$\boxed{v(t) = v_\ell\left(1 - \text{e}^{-t/\tau}\right)}$$

6. On calcule la date t_{95} à laquelle la vitesse limite est atteinte à 5% près :

$$0{,}95v_\ell = v_\ell\left(1 - \text{e}^{-t_{95}/\tau}\right) \iff \frac{t_{95}}{\tau} = -\ln 0{,}05 = \ln 20 \simeq 3 \iff t_{95} = 3\tau$$

On détermine le coefficient de frottement fluide :

$$t_{95} = 3\tau = \frac{3m}{\alpha} \iff \boxed{\alpha = \frac{3m}{t_{95}} = 90\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}}$$

On détermine la force F_0 :

$$v_\ell = \frac{F_0 - fmg}{\alpha} \iff \boxed{F_0 = fmg + \alpha v_\ell = 1{,}0\,\text{kN}}$$