Chapitre 7

SUITES

I Nombres réels (compléments)

1 Borne inférieure, borne supérieure

Définition 1 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

$s \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure de** *A si c'est le plus petit majorant de A (i.e. si c'est un majorant de A et que pour tout majorant M de A on a $s \leqslant M$). On note alors $s = \sup A$.*

$i \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure de** *A si c'est le plus grand minorant de A (i.e. si c'est un minorant de A et que pour tout minorant m de A on a $i \geqslant m$). On note alors $i = \inf A$.*

Proposition 1 *Si elles existent, elles sont uniques.*

C'est pourquoi on peut parler de *la* borne supérieure ou de *la* borne inférieure de A.

Démonstration :

Supposons que A ait deux bornes supérieures s_1 et s_2. Alors s_2 est le plus petit majorant de A, donc, puisque s_1 est un majorant de A, on a $s_2 \leqslant s_1$. De même, s_1 est le plus petit majorant de A, donc, puisque s_2 est un majorant de A, on a $s_1 \leqslant s_2$. Par conséquent $s_1 = s_2$.

On raisonne de la même manière pour la borne inférieure. □

Remarques :

1) Si $\max A$ existe alors $\sup A = \max A$ et si $\min A$ existe alors $\inf A = \min A$.

2) Par convention, si A n'est pas majorée on pose $\sup A = +\infty$ et si A n'est pas minorée on pose $\inf A = -\infty$.

Exemples :

– Soit $A =]1, 4]$. Les majorants de A sont les réels supérieurs ou égaux à 4, donc $\sup A = \max A = 4$. Les minorants de A sont les réels inférieurs ou égaux à 1, donc $\inf A = 1$, mais $1 \notin A$ donc $\min A$ n'existe pas.

– Soit $B = [-2, +\infty[$. Les minorants de B sont les réels inférieurs ou égaux à -2, donc $\inf B = \min B = -2$. En revanche, B n'est pas majorée, donc $\sup B = +\infty$ et $\max B$ n'existe pas.

– Soit $C = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. On a clairement $\sup C = \max C = 1$. Par ailleurs, les minorants de C sont les réels négatifs. En effet, pour tout $x > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < x$, donc x n'est pas un minorant de C. Par conséquent $\inf C = 0$ (mais $\min C$ n'existe pas).

2 Propriété de la borne supérieure

Théorème 2 *(Propriété de la borne supérieure) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*

Ce théorème (que l'on admet) est une des propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$. On notera que $\mathbb{Q}$ ne possède pas cette propriété. Par exemple on peut montrer que l'ensemble des rationnels x tels que $x^2 \leqslant 2$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ bien qu'il soit non vide et majoré.

Corollaire 3 *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Remarque : On appelle **droite réelle achevée**, et on note $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre $\leqslant$ en posant que $x \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant x$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Ainsi toute partie non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

3 Nombres rationnels et irrationnels

Définition 2 *Un* **nombre rationnel** *est un réel de la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.*

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Noter que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ puisque tout entier n peut s'écrire $\frac{n}{1}$.

$\mathbb{Q}$ est stable par l'addition et la multiplication des réels ($\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$ et $\frac{p_1}{q_1} \times \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$), ainsi que par le passage à l'opposé, et $\mathbb{Q}^*$ est stable par le passage à l'inverse.

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. Par exemple, on peut montrer que $\sqrt{2}$, e et π sont irrationnels.

Proposition 4 *Tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$) contient à la fois des rationnels et des irrationnels.*

Autrement dit, entre deux réels distincts quelconques, il y a des rationnels et des irrationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :
Montrons d'abord que l'intervalle $]a, b[$ contient un nombre rationnel.
On cherche donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < \frac{p}{q} < b$, soit $qa < p < qb$.
Pour qu'il y ait un entier compris strictement entre qa et qb, il suffit que l'on ait $qb - qa > 1$, soit $q > \frac{1}{b-a}$. Posons donc $q = \left\lfloor \frac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$.
En prenant alors $p = \lfloor qa \rfloor + 1$, on a, par définition de la partie entière, $p - 1 \leqslant qa < p$, donc $qa < p \leqslant qa + 1 < qb$. C'est ce qu'on voulait.

Montrons maintenant que l'intervalle $]a, b[$ contient un nombre irrationnel.

D'après ce qui précède, l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$ contient un nombre rationnel x. On a alors $a < x + \sqrt{2} < b$. Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc $x + \sqrt{2}$ aussi (sinon $\sqrt{2} = (x + \sqrt{2}) - x$ serait rationnel). □

4 Nombres décimaux

Définition 3 *Un* **nombre décimal** *est un réel de la forme $\dfrac{p}{10^n}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple : $2,531 = \dfrac{2531}{1000} = \dfrac{2531}{10^3}$ est un nombre décimal.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$. Il est inclus dans $\mathbb{Q}$ (mais pas égal : par exemple, $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal).

Proposition 5 *Pour tout réel x et pour tout entier naturel n, il existe un unique entier p_n tel que*

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant x < \frac{p_n + 1}{10^n}.$$

Démonstration : $\dfrac{p_n}{10^n} \leqslant x < \dfrac{p_n + 1}{10^n} \Leftrightarrow p_n \leqslant 10^n x < p_n + 1 \Leftrightarrow p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ par définition de la partie entière. □

Posons $a_n = \dfrac{p_n}{10^n}$ et $b_n = \dfrac{p_n + 1}{10^n}$. On a alors

$$\begin{cases} a_n \leqslant x < b_n \\ b_n - a_n = 10^{-n} \end{cases}.$$

On dit que a_n et b_n sont les **approximations décimales de x à 10^{-n} près par défaut** (a_n) et **par excès** (b_n).

Exemple : Pour $x = \sqrt{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
a_0 = 1 &\leqslant \sqrt{2} < 2 = b_0 \\
a_1 = 1,4 &\leqslant \sqrt{2} < 1,5 = b_1 \\
a_2 = 1,41 &\leqslant \sqrt{2} < 1,42 = b_2 \\
a_3 = 1,414 &\leqslant \sqrt{2} < 1,415 = b_3 \\
a_4 = 1,4142 &\leqslant \sqrt{2} < 1,4143 = b_4
\end{aligned}$$

5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ (où $a \leqslant b$), $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, \infty[(= \mathbb{R})$ et l'ensemble vide $\emptyset$.

Les intervalles de la forme $[a, b]$, $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont dits **fermés**, les intervalles de la forme $]a, b[$, $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont dits **ouverts**. $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés. $[a, b]$ est un **segment**.

Proposition 6 *Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous x et y dans X, on a $[x, y] \subset X$.*

On dit que les intervalles sont les parties **convexes** de $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Le sens direct est immédiat. Pour le sens réciproque, supposons X non vide ($\emptyset$ est un intervalle).

Posons $a = \inf X$ et $b = \sup X$ (où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). On a donc $X \subset [a, b]$, et on va montrer que $]a, b[\subset X$.

Soit $z \in]a, b[$. Alors z n'est ni un minorant de X (sinon on aurait $z \leqslant a$), ni un majorant de X (sinon on aurait $z \geqslant b$). Il existe donc $x, y \in X$ tels que $x < z < y$. Mais alors, par hypothèse, on a $[x, y] \subset X$, donc en particulier $z \in X$.

Conclusion : on a $X \subset [a, b]$ et $]a, b[\subset X$, donc $X = [a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$. $\square$

II Suites de nombres réels

1 Définition

Définition 4 *Une* **suite réelle** *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.

On note en général u_n au lieu de $u(n)$ le terme de rang n (ou d'indice n) de la suite. La suite elle-même est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).

L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On peut définir une suite de différentes manières. Explicitement d'abord, en donnant une formule pour u_n : soit par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Alors $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{2}{3}$, ...

On peut aussi définir une suite par une relation qui permet de calculer ses termes l'un après l'autre. On admet ainsi le résultat suivant :

Proposition 7 *Soient E un ensemble, a un élément de E et f une application de E dans E. Il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*

On dit que cette suite est définie par la **relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit par exemple la suite réelle (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$. Alors $u_0 = 1$, $u_1 = u_0^2 + 1 = 2$, $u_2 = u_1^2 + 1 = 5$, $u_3 = u_2^2 + 1 = 26$, etc...

Enfin, on peut définir une suite de manière implicite. Par exemple, la fonction $x \mapsto x + e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + e^x = n$ a une unique solution réelle. Notons x_n cette solution : on définit ainsi une suite (x_n). On verra en exercice comment étudier de telles suites.

2 Opérations dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et α un réel.

Addition : la suite $(u_n) + (v_n)$ est la suite de terme général $u_n + v_n$.

Multiplication : la suite $(u_n) \times (v_n)$ est la suite de terme général $u_n \times v_n$.

Multiplication par un réel : la suite $\alpha(u_n)$ est la suite de terme général αu_n.

L'addition est associative, commutative, admet pour élément neutre la suite nulle (de terme général 0), et tout élément (u_n) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet un opposé $(-u_n)$.

La multiplication est associative, commutative, admet pour élément neutre la suite de terme général 1, et un élément (u_n) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est inversible si et seulement si tous ses termes sont non nuls (son inverse est alors la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$). La multiplication est distributive par rapport à l'addition, mais elle n'est pas intègre.

3 Suites minorées, majorées, bornées

Définition 5 *Soit (u_n) une suite réelle.*

On dit que (u_n) est **majorée** *s'il existe un réel M tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

On dit que (u_n) est **minorée** *s'il existe un réel m tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n.$$

On dit que (u_n) est **bornée** *si elle est à la fois minorée et majorée, i.e. s'il existe deux réels m et M tels que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M.$$

Remarque : m et M sont des *constantes* qui ne dépendent pas de n.

Exemples :

– La suite de terme général $u_n = n$ est minorée par 0 (ainsi que par tout nombre négatif), mais elle n'est pas majorée. La suite de terme général $v_n = -n$ est majorée par 0 (ainsi que par tout nombre positif), mais elle n'est pas minorée.

– La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ (avec $n > 0$) est bornée : elle est minorée par 0 et majorée par 1.

– La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 1$ ou -1, donc (u_n) est minorée par -1 et majorée par 1.

– La suite de terme général $u_n = (-2)^n$ n'est ni minorée, ni majorée. En effet, si n est pair alors $u_n = 2^n$ et si n est impair alors $u_n = -2^n$.

Proposition 8 *Une suite (u_n) est bornée si et seulement s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Autrement dit, une suite est bornée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue.

Démonstration :

($\Leftarrow$) Si $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $-M \leqslant u_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc (u_n) est bornée.

($\Rightarrow$) Supposons que (u_n) est minorée par a et majorée par b. Posons $M = \max(|a|, |b|)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leqslant M$. □

4 Monotonie d'une suite

Définition 6 *Soit (u_n) une suite réelle.*

On dit que (u_n) est **constante** *si $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est* **stationnaire** *si elle est constante à partir d'un certain rang (i.e. s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$).*

On dit que (u_n) est **croissante** *si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est* **strictement croissante** *si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On dit que (u_n) est **décroissante** *si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est* **strictement décroissante** *si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On dit que (u_n) est **monotone** *si elle est croissante ou décroissante. Elle est* **strictement monotone** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemples :

– La suite de terme général $u_n = n$ est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n + 1 > n$.

– La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

– La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante puisqu'elle prend alternativement les valeurs 1 et -1.

En pratique, pour étudier la monotonie d'une suite, on peut :

– soit étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$,

– soit, si la suite est à termes *strictement positifs*, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

En effet on a, d'une part, $u_{n+1} \leqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, et d'autre part, si $u_n > 0$, $u_{n+1} \leqslant u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Si le terme général de la suite est de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut aussi étudier les variations de f.

Exercice 1 Etudier la monotonie des suites de terme général :

$$u_n = n^2 - 2n + 3 \ ; \ v_n = \frac{n!}{2^n} \ ; \ w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ ; \ x_n = \ln(n+1) - \ln n.$$

5 Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques

• Suites arithmétiques

Définition 7 *Une suite réelle (ou complexe) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **arithmétique** *s'il existe un nombre réel (ou complexe) r (qu'on appelle la* **raison** *de la suite) tel que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Proposition 9 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration : Par récurrence immédiate. $\square$

Proposition 10 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Alors $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.*

Formule qu'on retient plus facilement sous la forme :

$$\text{Somme des termes d'une suite arithmétique} = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

Démonstration : On peut raisonner par récurrence ou se ramener à la formule $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\square$

• Suites géométriques

Définition 8 *Une suite réelle (ou complexe) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **géométrique** *s'il existe un nombre réel (ou complexe) q (qu'on appelle la* **raison** *de la suite) tel que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = qu_n.$$

Proposition 11 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 q^n.$$

Démonstration : Par récurrence immédiate. $\square$

Proposition 12 *Pour tout $q \in \mathbb{C}$:*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ n+1 & si\ q = 1 \end{cases}.$$

Démonstration : Déjà vu. $\square$

• Suites arithmético-géométriques

Définition 9 *Une* **suite arithmético-géométrique** *est une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à une relation de récurrence de la forme*

$$u_{n+1} = au_n + b,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, on cherchera α telle que la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique.

Exercice 2 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

6 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 10 *Une* **suite récurrente linéaire d'ordre 2** *est une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à une relation de récurrence de la forme*

$$(*)\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.
On appelle **équation caractéristique** *associée à (u_n) l'équation (d'inconnue $r \in \mathbb{C}$) :*

$$(e) : ar^2 + br + c = 0.$$

Proposition 13 *(Cas complexe) Soit* Δ *le discriminant de* (e).
Si $\Delta \neq 0$, *les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,$$

où r_1 *et* r_2 *sont les racines de* (e) *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
Si $\Delta = 0$, *les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = (\alpha n + \beta) r_0^n,$$

où r_0 *est la racine double de* (e) *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Proposition 14 *(Cas réel) Soit* Δ *le discriminant de* (e).
Si $\Delta > 0$, *les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,$$

où r_1 *et* r_2 *sont les racines de* (e) *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Si $\Delta = 0$, *les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = (\alpha n + \beta) r_0^n,$$

où r_0 *est la racine double de* (e) *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Si $\Delta < 0$, *les suites vérifiant la relation* $(*)$ *sont les suites de terme général*

$$u_n = \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \beta \rho^n \sin(n\theta),$$

où $\rho e^{i\theta}$ *et* $\rho e^{-i\theta}$ *sont les racines de* (e) *(avec* $\rho > 0$*) et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Exercice 3 Déterminer l'expression de u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :
1) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$.
2) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

III Limite d'une suite

1 Définitions

• Limites finies

Définition 11 *Soit* (u_n) *une suite réelle. Soit* a *un réel. On dit que* (u_n) **admet pour limite** a *ou qu'elle* **tend vers** a *ou encore qu'elle* **converge vers** a *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un rang à partir duquel on a* $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$, *ce que l'on peut écrire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leqslant \varepsilon).$$

Interprétation : $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$ (qui équivaut à $a - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant a + \varepsilon$) signifie que la distance entre u_n et a est inférieure à ε.

Proposition 15 *Si* a *existe, il est unique. On l'appelle* **la limite de** (u_n) *et on note* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ *ou simplement* $\lim\limits_{n} u_n = a$ *ou encore* $u_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.

Démonstration :
Supposons que (u_n) converge à la fois vers a et vers b, avec $a \neq b$. Soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$.
Alors, puisque (u_n) converge vers a, il existe un rang n_1 à partir duquel on a $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$. De même, puisque (u_n) converge vers b, il existe un rang n_2 à partir duquel on a $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$.

Pour tout n supérieur à la fois à n_1 et à n_2, on a donc $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$ et $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Mais alors $|b-a| = |b - u_n + u_n - a| \leqslant |b - u_n| + |u_n - a| \leqslant 2\varepsilon$. Or $\varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$ donc $2\varepsilon < |b-a|$. On obtient ainsi $|b-a| < |b-a|$, ce qui est contradictoire. □

Définition 12 *S'il existe un* réel a *tel que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, *alors on dit que la suite* (u_n) *est* **convergente**. *Sinon on dit qu'elle est* **divergente**.

Remarques :

1) Quand on parle de limite d'une suite (u_n), n tend toujours vers $+\infty$.

2) La suite (u_n) converge vers a si et seulement si la suite $(u_n - a)$ converge vers 0 (la définition de la limite est la même dans les deux cas). On peut ainsi toujours se ramener à une limite nulle. En particulier on utilisera souvent le fait que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - a| = 0.$$

• Limites infinies

Définition 13 *Soit (u_n) une suite réelle. On dit (u_n)* **tend vers** $+\infty$ *ou qu'elle* **diverge vers** $+\infty$ *ou encore que* **la limite de** (u_n) **est** $+\infty$ *si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang à partir duquel on a $u_n \geqslant A$, ce que l'on peut écrire :*

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou simplement $\lim\limits_{n} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 14 *Soit (u_n) une suite réelle. On dit (u_n)* **tend vers** $-\infty$ *ou qu'elle* **diverge vers** $-\infty$ *ou encore que* **la limite de** (u_n) **est** $-\infty$ *si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang à partir duquel on a $u_n \leqslant A$, ce que l'on peut écrire :*

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant A).$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou simplement $\lim\limits_{n} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 16 *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration :

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel a.

Alors il existe un rang n_0 à partir duquel on a $|u_n - a| \leqslant 1$, soit $a - 1 \leqslant u_n \leqslant a + 1$. A partir de n_0 la suite est donc bornée.

Par ailleurs, avant n_0, il n'y a qu'un nombre fini de termes u_0, u_1, …, u_{n_0-1}. La suite est donc bornée. □

Remarque : La réciproque est fausse. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais non convergente.

Proposition 17 *Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel strictement positif a. Soit b un réel tel que $0 < b < a$. Alors il existe un rang à partir duquel on a $u_n > b$.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon = a - b$. □

Remarque : En particulier, toute suite convergeant vers un réel strictement positif prend, à partir d'un certain rang, des valeurs strictement positives.

Proposition 18 *Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel strictement négatif a. Soit b un réel tel que $a < b < 0$. Alors il existe un rang à partir duquel on a $u_n < b$.*

3 Opérations sur les limites

• Limites finies

Proposition 19 *Si les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers a et b, alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $a + b$.*

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite (appliquée à $\frac{\varepsilon}{2}$), il existe un rang n_1 à partir duquel on a $|u_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe un rang n_2 à partir duquel on a $|v_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a alors $|u_n + v_n - (a+b)| = |u_n - a + v_n - b| \leqslant |u_n - a| + |v_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$. □

Proposition 20 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si la suite (u_n) converge vers a, alors la suite (αu_n) converge vers αa.*

Démonstration :

Si $\alpha = 0$ c'est immédiat. Supposons $\alpha \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite (appliquée à $\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$), il existe un rang n_0 à partir duquel on a $|u_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$. Si $n \geqslant n_0$, on a alors $|\alpha u_n - \alpha a| = |\alpha(u_n - a)| = |\alpha| \times |u_n - a| \leqslant |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \leqslant \varepsilon$. □

Proposition 21 *Si la suite (u_n) converge vers 0 et que la suite (v_n) est bornée, alors la suite (u_nv_n) converge vers 0.*

Démonstration :

La suite (v_n) est bornée, donc il existe un réel $M > 0$ tel que $|v_n| < M$ pour tout n.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite (appliquée à $\frac{\varepsilon}{M}$), il existe un rang n_0 à partir duquel on a $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$.
Si $n \geqslant n_0$, on a alors $|u_nv_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} \leqslant \varepsilon$. □

Exemple : Soit à calculer la limite de la suite de terme général $\dfrac{\sin(n^2+n+1)}{n}$. La suite $(\sin(n^2+n+1))$ est bornée (car pour tout n on a $-1 \leqslant \sin(n^2+n+1) \leqslant 1$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n^2+n+1)}{n} = 0$.

Corollaire 22 *Si les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers a et b, alors la suite (u_nv_n) converge vers ab.*

Démonstration :

On a $u_nv_n - ab = u_nv_n - av_n + av_n - ab = (u_n - a)v_n + a(v_n - b)$. Or la suite $(u_n - a)$ converge vers 0 et la suite (v_n) est bornée (car elle est convergente), donc la suite $(u_n - a)v_n$ converge vers 0. D'autre part, la suite $(v_n - b)$ converge vers 0, donc la suite $(a(v_n - b))$ aussi. On en déduit que la suite $(u_nv_n - ab)$ converge vers 0, et donc que la suite (u_nv_n) converge vers ab. □

Proposition 23 *Si la suite (u_n) ne s'annule pas et qu'elle converge vers $a \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{a}$.*

Démonstration :

Supposons $a > 0$. Soit b un réel tel que $0 < b < a$. D'après la proposition 17, il existe un rang n_0 à partir duquel on a $u_n > b$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 à partir duquel on a $|u_n - a| \leqslant ab\varepsilon$. Si $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, alors $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-u_n}{au_n}\right| = \frac{|a-u_n|}{au_n} \leqslant \varepsilon$ car $au_n > ab$. □

Corollaire 24 *Si la suite (u_n) converge vers a et que la suite (v_n) ne s'annule pas et qu'elle converge vers $b \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{a}{b}$.*

• Limites infinies

On admet les résultats figurant dans les tableaux suivants. FI signifie forme indéterminée.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	FI

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$
$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$a > 0$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$a > 0$	0^+	$+\infty$
0	0	FI
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

4 Limites et relation d'ordre

• Passage à la limite

Proposition 25 *Si la suite (u_n) converge vers a et qu'elle est positive à partir d'un certain rang, alors $a \geqslant 0$.*

Démonstration :

Si on avait $a < 0$, alors d'après la proposition 18, on aurait $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, ce qui est contraire aux hypothèses. □

Corollaire 26 *Si les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers a et b et que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $a \geqslant b$.*

On dit que l'on **passe à la limite** dans l'inégalité $u_n \geqslant v_n$.

Démonstration : Appliquer la proposition précédente à la suite $(u_n - v_n)$. □

Remarques :

1) Pour pouvoir faire un passage à la limite, il faut avoir démontré auparavant que les limites existent.

2) Quand on passe à la limite, les inégalités *strictes* deviennent *larges* : si l'on a $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang, on peut conclure que $a \geqslant b$, mais pas que $a > b$. On peut considérer par exemple $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = 0$.

• Théorème des gendarmes

Proposition 27 *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang. Si (u_n) et (w_n) convergent vers a, alors (v_n) aussi.*

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. (u_n) converge vers a donc il existe un rang n_1 à partir duquel on a $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$. De même, il existe un rang n_2 à partir duquel on a $|w_n - a| \leqslant \varepsilon$. Enfin, par hypothèse, il existe un rang n_0 à partir duquel on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$, alors on a $u_n - a \leqslant v_n - a \leqslant w_n - a$, donc $-\varepsilon \leqslant v_n - a \leqslant \varepsilon$, soit $|v_n - a| \leqslant \varepsilon$. □

Pour déterminer la limite d'une suite, on peut donc essayer d'encadrer celle-ci par deux suites simples qui convergent vers la même limite.

Exemple : Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ aussi.

Autres versions :

Proposition 28 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $|u_n| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) aussi.*

Démonstration : Il suffit d'écrire que $|u_n| \leqslant v_n \Leftrightarrow -v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ et d'appliquer le résultat précédent. □

Par conséquent, pour montrer qu'une suite (u_n) converge vers a, on peut essayer de majorer $|u_n - a|$ par une suite qui converge vers 0.

Proposition 29 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si (v_n) diverge vers $+\infty$, alors (u_n) aussi.*

Démonstration :

Soit $A \in \mathbb{R}$. (v_n) diverge vers $+\infty$ donc il existe un rang n_1 à partir duquel on a $v_n \geqslant A$. Soit n_0 un rang à partir duquel on a $u_n \geqslant v_n$.

Si $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, alors on a $u_n \geqslant v_n \geqslant A$. □

De même :

Proposition 30 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si (v_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) aussi.*

5 Suites extraites

Définition 15 *Soit (u_n) une suite. Une* **suite extraite** *de la suite (u_n) est une suite de la forme $(u_{f(n)})$, où f est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Exemple : La suite $(u_{2n}) = (u_0, u_2, u_4, \ldots)$ est la suite des termes de rangs pairs de la suite (u_n). La suite $(u_{2n+1}) = (u_1, u_3, u_5, \ldots)$ est la suite des termes de rangs impairs de la suite (u_n).

Proposition 31 *Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Démonstration :

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel a. Soit $(u_{f(n)})$ une suite extraite de (u_n).

Par récurrence immédiate, on montre que la stricte croissance de f implique que $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$. (u_n) converge vers a donc il existe un rang n_0 à partir duquel on a $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$. Si $n \geqslant n_0$, alors $f(n) \geqslant n \geqslant n_0$ également, donc $|u_{f(n)} - a| \leqslant \varepsilon$. □

Remarques :

1) De la même manière, on peut démontrer que si (u_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors toutes ses suites extraites divergent aussi vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

2) Pour montrer qu'une suite bornée diverge, il suffit de trouver deux suites extraites de cette suite qui convergent vers des limites différentes. Considérons par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. La suite de ses termes pairs (u_{2n}) est constante égale à 1, donc elle converge vers 1. La suite de ses termes impairs (u_{2n+1}) est constante égale à -1, donc elle converge vers -1. Si (u_n) convergeait, alors d'après la proposition précédente, ces deux suites convergeraient vers la même limite, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, la suite (u_n) n'est pas convergente.

Proposition 32 *Soit (u_n) une suite réelle. Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers a (où $a \in \overline{\mathbb{R}}$), alors (u_n) tend aussi vers a.*

Démonstration : (Pour $a \in \mathbb{R}$.)

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_{2n} - a| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_1$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_{2n+1} - a| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_2$.

Soit $n \geqslant \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Si n est pair, on peut écrire $n = 2p$ avec $p \geqslant n_1$, donc $|u_n - a| = |u_{2p} - a| \leqslant \varepsilon$. Si n est impair, on peut écrire $n = 2p + 1$ avec $p \geqslant n_2$, donc $|u_n - a| = |u_{2p+1} - a| \leqslant \varepsilon$. Dans les deux cas on a $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$. □

IV Théorèmes d'existence de limites

1 Suites monotones

Proposition 33 *(Théorème de la limite monotone)*

(i) Toute suite croissante et majorée est convergente.

(ii) Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Démonstration :

(i) L'ensemble $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des termes de la suite est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc il admet une borne supérieure a. On va montrer que (u_n) converge vers a.

Soit $\varepsilon > 0$. Le plus petit majorant de la suite est a et $a - \varepsilon < a$ donc $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de la suite. Il existe donc un terme u_{n_0} de la suite tel que $a - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant a$. De plus, la suite est croissante, donc pour tout $n \geqslant n_0$ on a $a - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant a$, et donc $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.

(ii) Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) n'est pas majorée, donc il existe un terme u_{n_0} de la suite tel que $u_{n_0} \geqslant A$. De plus, la suite est croissante, donc pour tout $n \geqslant n_0$ on a aussi $u_n \geqslant A$. Conclusion : la suite diverge vers $+\infty$. □

On a un résultat analogue pour les suites décroissantes :

Proposition 34

(i) Toute suite décroissante et minorée est convergente.

(ii) Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la suite $(-u_n)$. □

Remarques :

1) Ces théorèmes permettent de montrer qu'une suite est convergente, mais pas de calculer sa limite.

2) Si une suite est croissante et majorée par a, ou décroissante et minorée par a, alors elle converge, mais *pas forcément vers a*. Par exemple, la suite de terme général $1 + \frac{1}{n}$ est décroissante et minorée par 0, mais sa limite est 1 et non 0.

Exercice 4 Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1) Etudier la monotonie de (S_n).

2) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. En déduire que (S_n) est majorée.

3) Montrer que (S_n) est convergente et donner un majorant de sa limite.

2 Suites adjacentes

Définition 16 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont* **adjacentes** *si l'une d'elles est croissante, que l'autre est décroissante et que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Proposition 35 *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Démonstration :

Supposons que la suite croissante est (u_n) et que la suite décroissante est (v_n).

Montrons d'abord que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe un rang n_0 pour lequel on ait $u_{n_0} > v_{n_0}$. Alors, puisque (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, on a $u_n \geqslant u_{n_0} > v_{n_0} \geqslant v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$, d'où $u_n - v_n \geqslant u_{n_0} - v_{n_0}$. En passant à la limite, on obtient $0 \geqslant u_{n_0} - v_{n_0}$ ce qui est absurde.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. La suite (u_n) est donc majorée par v_0. Comme, de plus, elle est croissante, alors elle converge. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge.

Soient L_1 la limite de (u_n) et L_2 la limite de (v_n). Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = L_1 - L_2$. Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, donc $L_1 - L_2 = 0$, d'où $L_1 = L_2$: les deux suites convergent vers la même limite. □

Remarque : Le théorème permet de démontrer que la limite L des deux suites existe, mais pas de la calculer. On a cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement :

$$u_n \leqslant L \leqslant v_n$$

(si c'est (u_n) qui est croissante et (v_n) décroissante).

Exercice 5 Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer une valeur approchée de leur limite commune à 10^{-5} près.

Un autre exemple de suites adjacentes a été rencontré au paragraphe I.4 : les approximations décimales d'un réel. On a vu que, pour tout réel x, il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant x < b_n \\ b_n - a_n = 10^{-n} \end{cases}.$$

La suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$, donc (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes. Par conséquent elles convergent vers la même limite L. En passant à la limite dans l'encadrement $a_n \leqslant x < b_n$, on obtient que $L \leqslant x \leqslant L$, donc $L = x$.

En particulier, on en déduit que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels (et même décimaux).

V Exemples de suites définies par une relation de récurrence

On étudie dans ce paragraphe deux exemples de suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction à valeurs réelles.

1 Idées générales

1) Quand on veut étudier une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, on commence généralement par la représenter graphiquement à l'aide du graphe de f et de la droite d'équation $y = x$:

– On place u_0 sur l'axe des abscisses.

– Pour obtenir $u_1 = f(u_0)$ on va sur la courbe (i.e. on relie les points de coordonnées $(u_0, 0)$ et $(u_0, f(u_0)) = (u_0, u_1)$.

– On va sur la droite (i.e. on relie les points de coordonnées (u_0, u_1) et (u_1, u_1)), ce qui permet de placer u_1 sur l'axe des abscisses.

Ensuite on recommence pour obtenir $u_2, u_3, \ldots$ On va donc successivement sur la courbe, puis sur la droite, puis sur la courbe, etc.

On peut ainsi conjecturer le comportement de la suite (monotonie, convergence).

2) À partir du dessin on peut conjecturer un intervalle I contenant u_0 et **stable par** f (i.e. tel que si $x \in I$ alors $f(x) \in I$). On montre alors par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Si la fonction f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est soit croissante soit décroissante (selon que $u_1 \geqslant u_0$ ou que $u_1 \leqslant u_0$). Cela se démontre par récurrence (voir le premier exemple ci-dessous).

4) Si la fonction f est décroissante sur I, alors on est amené à étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) (voir le deuxième exemple ci-dessous).

5) L'étude du signe de $f(x) - x$ peut également permettre d'étudier la monotonie de (u_n).

6) Si la suite (u_n) converge vers ℓ et que f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ (on dit que ℓ est un point fixe de f). Démonstration : il suffit de passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ (bien mentionner la continuité de f).

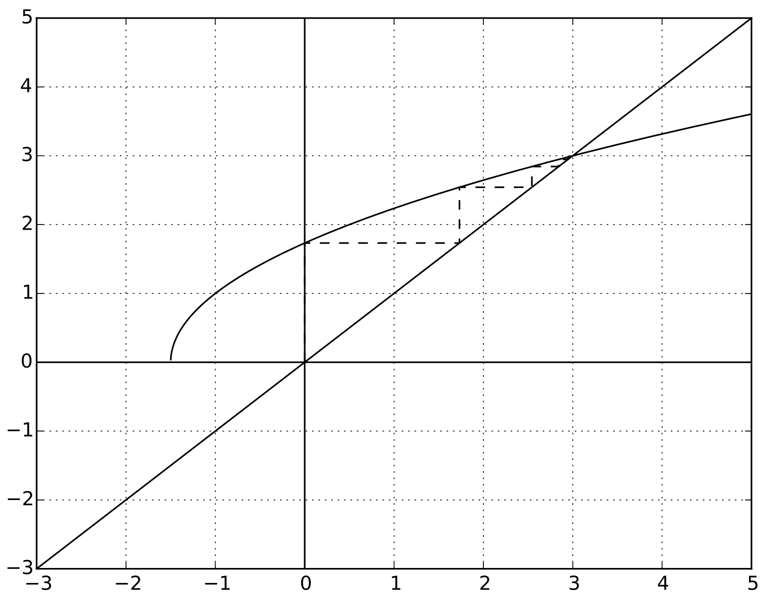
2 Exemple : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$ pour tout $x \geqslant -3/2$ et soit la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f est croissante et continue sur $[-3/2, +\infty[$. Déterminons ses points fixes. Si $x \geqslant 0$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x + 3 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 3).$$

et si $x < 0$ l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution. Le seul point fixe de f est donc 3.



La figure permet de conjecturer que la suite est à valeurs dans l'intervalle $[0, 3]$, qu'elle est croissante et qu'elle converge vers 3. Démontrons-le.

1) Notons d'abord que l'intervalle $[0, 3]$ est stable par f : puisque f est croissante et continue, on a $f([0, 3]) = [f(0), f(3)] = [\sqrt{3}, 3] \subset [0, 3]$.

Montrons par récurrence que $u_n \in [0, 3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $u_0 \in [0, 3]$ par hypothèse, et si $u_n \in [0, 3]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 3]$ d'après ce qui précède. Le théorème de récurrence permet de conclure.

2) Montrons par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3}$ donc $u_1 \geqslant u_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{n+1} \geqslant u_n$. Alors, puisque f est croissante, on a $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$, i.e. $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.

Par le théorème de récurrence, on a bien montré que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle est convergente. Notons ℓ sa limite. On a $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ pour tout n, donc par passage à la limite on a aussi $0 \leqslant \ell \leqslant 3$.

De plus on a $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ (suite extraite) et, puisque f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Par conséquent $f(\ell) = \ell$, et donc ℓ est un point fixe de f. Or le seul point fixe de f est 3, donc $\ell = 3$.

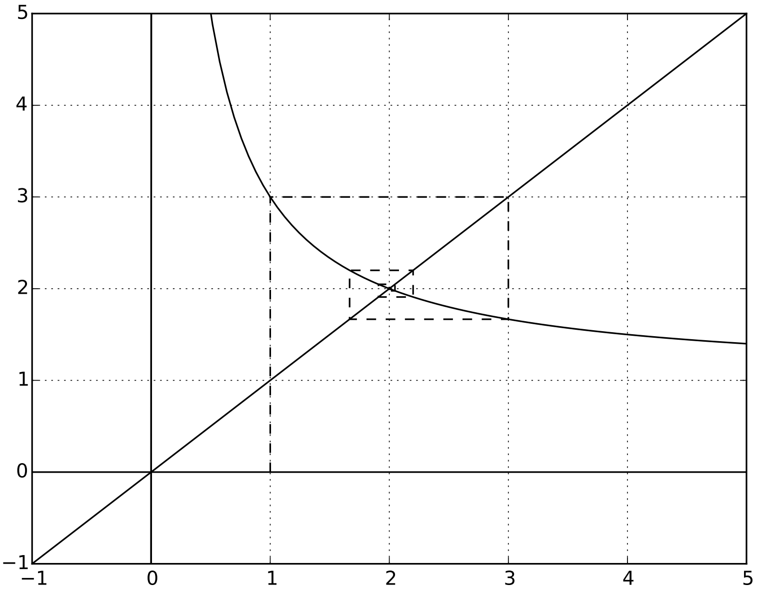
3 Exemple : $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$

Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ pour tout x non nul et soit la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f est décroissante et continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Déterminons ses points fixes. Si $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 2).$$

La figure suivante permet de conjecturer que la suite est à valeurs dans l'intervalle $[1, 3]$ et qu'elle converge vers 2. On voit qu'elle n'est pas monotone, mais que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont respectivement croissante et décroissante. Démontrons-le.



1) La fonction f est décroissante et continue sur $]0,+\infty[$ donc $f([1,3]) = [f(3), f(1)] = [5/3, 3] \subset [1,3]$. L'intervalle $[1,3]$ est stable par f. Comme précédemment on en déduit par récurrence que $u_n \in [1,3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrons par récurrence que $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$ et $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est vrai pour $n = 0$ car $u_2 = 5/3 \geqslant 1 = u_0$ et $u_3 = 11/5 \leqslant 3 = u_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$ et $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$. Alors, puisque f est décroissante, on a $f(u_{2n+3}) \geqslant f(u_{2n+1})$, i.e. $u_{2n+4} \geqslant u_{2n+2}$, puis $f(u_{2n+4}) \leqslant f(u_{2n+2})$, i.e. $u_{2n+5} \leqslant u_{2n+3}$.

Le théorème de récurrence permet de conclure. On a ainsi montré que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

3) La suite (u_{2n}) est croissante et majorée (par 3) donc elle est convergente. Notons ℓ_1 sa limite. De même, la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée (par 1) donc elle est convergente. Notons ℓ_2 sa limite.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans les égalités $u_{2n+2} = f(f(u_{2n}))$ et $u_{2n+3} = f(f(u_{2n+1}))$ on obtient

$$\ell_1 = f(f(\ell_1)) \qquad \text{et} \qquad \ell_2 = f(f(\ell_2))$$

car la fonction f est continue. Ainsi ℓ_1 et ℓ_2 sont des points fixes de $f \circ f$. Or $f \circ f(x) = 1 + \dfrac{2}{1 + \frac{2}{x}} = \dfrac{3x+2}{x+2}$ donc :

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow 3x + 2 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 2).$$

De plus les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont à valeurs dans l'intervalle $[1,3]$, donc par passage à la limite leurs limites aussi, et donc $\ell_1 = \ell_2 = 2$.

La proposition 32 permet de conclure que la suite (u_n) converge vers 2.

VI Notions sur les suites à valeurs complexes

1 Définitions

Définition 17 *Une* **suite à valeurs complexes** *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes.

Définition 18 *Soit* (u_n) *une suite complexe. La* **partie réelle** *de* (u_n) *est la suite de terme général* $\mathrm{Re}(u_n)$. *La* **partie imaginaire** *de* (u_n) *est la suite de terme général* $\mathrm{Im}(u_n)$. *La suite* **conjuguée** *de* (u_n) *est la suite de terme général* $\overline{u_n}$.

Exemple : Soit la suite de terme général $u_n = 2^n e^{\frac{i\pi}{n}}$. Alors les parties réelle et imaginaire de (u_n) sont les suites de termes généraux $2^n \cos \frac{\pi}{n}$ et $2^n \sin \frac{\pi}{n}$ respectivement, et la suite conjuguée de (u_n) est la suite de terme général $2^n e^{-\frac{i\pi}{n}}$.

Il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$, donc on ne peut pas parler de suite complexe majorée ou minorée. En revanche on peut définir la notion de suite bornée :

Définition 19 *La suite complexe (u_n) est* **bornée** *s'il existe un réel positif M tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Dans le plan complexe, cela revient à dire que les images des termes de la suite appartiennent au disque de centre O et de rayon M.

Proposition 36 *La suite complexe (u_n) est bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont bornées.*

Démonstration : Pour le sens direct, $|\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n|$. Pour le sens réciproque, $|u_n| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 u_n + \operatorname{Im}^2 u_n}$. □

2 Limite d'une suite à valeurs complexes

Définition 20 *On dit que la suite complexe (u_n)* **admet** $a \in \mathbb{C}$ **pour limite** *(ou* **converge vers** *a, ou* **tend vers** *a) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leqslant \varepsilon).$$

La définition est la même que pour les suites réelles en remplaçant la valeur absolue par le module. Comme pour les suites réelles :

Proposition 37 *Si a existe, il est unique. On l'appelle* **la limite de** (u_n) *et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ ou simplement $\lim\limits_{n} u_n = a$.*

Une suite qui admet une limite finie est dite **convergente**, sinon elle est **divergente**.

Pour étudier la convergence d'une suite complexe, on peut se ramener à des suites réelles grâce aux propositions suivantes :

Proposition 38 *La suite complexe (u_n) converge vers a si et seulement si la suite de terme général $|u_n - a|$ converge vers 0.*

Démonstration : Même définition de la limite. □

Proposition 39 *La suite complexe (u_n) est convergente si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. Dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{Re} u_n + i \lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{Im} u_n$.*

Démonstration : Utiliser la proposition précédente, les inégalités $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$ et $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$ et l'égalité $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$. □

Proposition 40 *Si la suite (u_n) converge vers a et que la suite (v_n) converge vers b, alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $a + b$, la suite (αu_n) (où $\alpha \in \mathbb{C}$) converge vers αa, et la suite $(u_n v_n)$ converge vers ab.*

Démonstration : Passer aux parties réelles et imaginaires. □

Proposition 41 *Toute suite complexe convergente est bornée.*

Démonstration : Passer aux parties réelles et imaginaires. □

Remarque : Les propositions portant sur les suites réelles qui font intervenir la relation d'ordre (passage à la limite, théorème des gendarmes, limite d'une suite monotone, suites adjacentes) ne sont plus valables dans $\mathbb{C}$ puisqu'il n'y a pas d'ordre. On ne peut pas non plus définir la monotonie d'une suite complexe. Enfin, pour une suite complexe, écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ n'a aucun sens.