Devoir n°12 (non surveillé)

On dit qu'un ensemble E est **dénombrable** s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E.

1) On note P l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que P est dénombrable en considérant l'application $f : \mathbb{N} \to P$ définie par $f(n) = 2n$.

2) Montrer que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

3) On considère les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définies respectivement par :

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et } g(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire ?

4) On considère l'application $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(p, q) = 2^p(2q + 1)$.

a) Calculer $\varphi(p, q)$ pour $(p, q) \in \{0, 1, 2\}^2$. Déterminer un antécédent de 120 par φ.

b) Montrer que φ est injective.

c) Montrer que φ est surjective (indication : décomposition en produit de facteurs premiers).

d) En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

5) a) Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une bijection. Montrer que l'application $\psi : (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$ est une bijection de $E \times E$ dans $F \times F$.

b) En déduire que $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

6) Soit E un ensemble. Soit f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$.

a) Montrer que f ne peut pas être surjective (on pourra montrer que $A = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$ ne peut pas avoir d'antécédent par f).

b) En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

7) Soit E un ensemble. On considère l'application $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \{0, 1\}^E$ définie par $\varphi(A) = \mathbb{1}_A$.

a) Montrer que φ est injective.

b) Montrer que pour toute application f de E dans $\{0, 1\}$ on a $\mathbb{1}_{f^{-1}(\{1\})} = f$. En déduire que φ est surjective.

c) Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Remarque : en utilisant le développement binaire d'un réel, on peut en déduire (mais ce n'est pas demandé) que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.