Fiche d'exercices : Suites

Exercice 1 L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est-il stable par l'addition ? Par la multiplication ? Mêmes questions pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et pour l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels.

Exercice 2 Montrer que, pour tout couple (a, b) de nombres rationnels, on a :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \text{ et } \sqrt{b} \in \mathbb{Q}).$$

Exercice 3 Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 4 Déterminer, s'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit et le plus grand élément des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \,\middle|\, (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\} \ ; \ \left\{ \frac{x}{1 + x^2} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} \ ; \ \left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \,\middle|\, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

Exercice 5 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.

2) Montrer que $A \cup B$ est majorée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

3) Si $A \cap B$ est non vide, a-t-on $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$?

Exercice 6 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup\{x - y \,|\, (x, y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

Exercice 7 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Toute suite croissante est minorée.

2) Toute suite convergente et majorée est croissante.

3) Toute suite est majorée ou minorée.

4) Toute suite bornée est convergente.

5) Si la suite (u_n) converge et si tous ses termes sont strictement positifs, alors sa limite est strictement positive.

6) Si la suite $(|u_n|)$ est convergente, alors la suite (u_n) aussi.

7) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = +\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.

8) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ aussi.

9) Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors la suite (u_n) aussi.

10) Si (u_n) converge, alors $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 en $+\infty$.

11) Si $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 en $+\infty$, alors (u_n) converge.

Exercice 8 Étudier la monotonie et la convergence des suites de terme général :

$$n^2 - 5n + 2 \ ; \ \frac{2n+1}{3^n} \ ; \ \frac{3n+2}{2n+3} \ ; \ \frac{n^n}{n!} \ ; \ \frac{n^2}{2^n} \ ; \ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ ; \ \sqrt[n]{n} \ ; \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 9 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant 3$.

Exercice 10 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$, si cette limite existe.

Exercice 11 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 3]$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leqslant \dfrac{1}{3}|u_n - 3|$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 3| \leqslant \dfrac{1}{3^{n-1}}$, puis retrouver la limite de (u_n).

Exercice 12 Montrer que la suite de terme général $\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)^2}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 13 Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

b) En déduire la limite de la suite de terme général $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 14 Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k(k+1)}$. Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 15 On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \dfrac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots (2n)}$.

1) Étudier la monotonie de (u_n) et en déduire qu'elle converge.

2) Établir, pour tout n, l'inégalité $u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$, et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 16 Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes et donner un encadrement à 10^{-1} près de leur limite commune.

Exercice 17 Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ sont adjacentes.

Exercice 18 Étudier les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 4$, $b_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$.

Exercice 19 Étudier la convergence des suites de terme général :

$$\cos\left((n+\frac{1}{n})\pi\right) \quad ; \quad \left(2\sin\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\cos n\right)^n \quad ; \quad \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

Exercice 20 Étudier la convergence des suites de terme général $\cos n$ et $\sin n$.

Exercice 21 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) aussi.

Exercice 22 Montrer qu'une suite à valeurs entières converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 23 *(Théorème de Cesàro)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et soit $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors (S_n) aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 24 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $u_n v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer que $u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et que $v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 25 Étudier la monotonie et la convergence des suites récurrentes suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1-u_n} \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1-u_n)^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \dfrac{u_n^2}{2} \end{cases}$

Exercice 26 Étudier la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et telle que, pour tout n, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

Exercice 27

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $xe^x = n$ a une unique solution réelle, que l'on notera x_n.

2) Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n).

3) Déterminer la limite de $\dfrac{x_n}{\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 28 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1$ a une unique solution, que l'on notera u_n, dans l'intervalle $[0,1]$, puis étudier la suite (u_n).