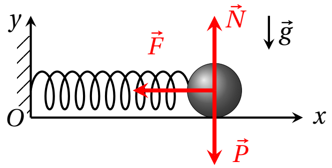
TD9 : Oscillateur harmonique - corrigé

Application 1



1. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{N}$ du support et à la force de rappel du ressort $\vec{F}$. Étant donnée la position de l'origine du repère la longueur du ressort est : $\ell = x$ donc $\vec{F} = -k(x-\ell_0)\vec{u}_x$.

On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$. On le projette sur $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -k(x-\ell_0) \iff \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0}$$

La pulsation propre vaut : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$.

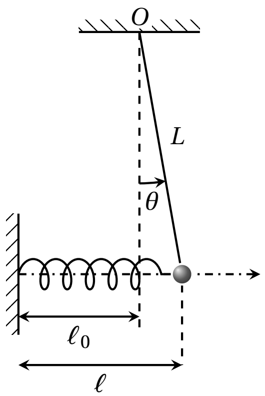
<u>Remarque</u> : L'origine du repère n'est pas confondue avec la position d'équilibre de la masse. Cette fois-ci, comme on pouvait s'y attendre, l'équation du mouvement admet un second membre.

2. On détermine la solution particulière en résolvant l'équation sans dérivée : $x_p = \ell_0$. La solution générale de l'équation s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_0$. On détermine les constantes d'intégration A et B avec les conditions initiales $x(0) = \ell_0$ (ressort dans son état de repos) et $\dot{x}(0) = v_0$.

On obtient $A = 0$ et $B = v_0/\omega_0$ d'où : $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \ell_0}$.

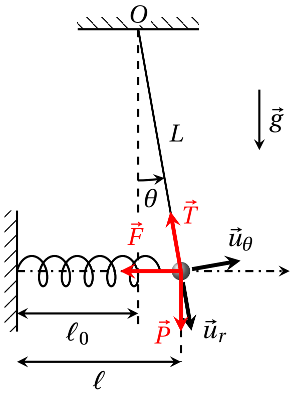
L'allongement du ressort vaut $\Delta\ell = x - \ell_0 = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$. Sa valeur maximale est atteinte lorsque $\sin(\omega_0 t) = 1$ et vaut : $\boxed{\Delta\ell_{\max} = \frac{v_0}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0}$.

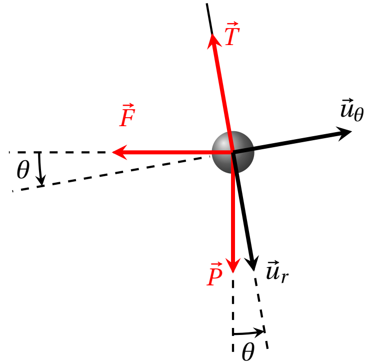
Application 2



1. D'après le schéma ci-contre, la longueur du fil étant égale à L, on peut écrire : $\ell - \ell_0 = L\sin\theta$. On simplifie dans l'approximation des petits angles :

$$\boxed{\ell - \ell_0 \simeq L\theta}$$





2. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$, à la tension du fil $\vec{T}$ et à la force de rappel du ressort $\vec{F}$. On représente ces forces sur le schéma (ci-dessus à gauche) et on met en évidence les directions de ces forces par rapport aux vecteurs de la base polaire (ci-dessus à droite). D'après le résultat de la question précédente : $\vec{F} = -kL\theta\vec{u}_x$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}$. On le projette dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\left|\begin{array}{l} -mL\dot{\theta}^2 \\ mL\ddot{\theta} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l} -kL\theta\sin\theta \\ -kL\theta\cos\theta \end{array}\right.$$

Le PFD projeté sur $\vec{u}_\theta$, simplifié avec les approximations $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$, devient :

$$mL\ddot{\theta} = -mg\theta - kL\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)\theta = 0}$$

La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{m}}$ et la période propre : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{m}}}}$.

Application 3

Les deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont synchrones : leur période vaut $T = 50\,\text{ms}$ et leur fréquence $\boxed{f = 1/T = 20\,\text{Hz}}$.

L'amplitude de $u_1(t)$ vaut $\boxed{U_{1m} = 6\,\text{V}}$ et celle de $u_2(t)$ vaut $\boxed{U_{2m} = 4\,\text{V}}$.

L'écart temporel entre les deux tensions vaut $\Delta t = 15\,\text{ms}$ donc le déphasage vaut :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{50} \times 15 = 1{,}9\,\text{rad} = 110°}$$

Sur un intervalle Δt on voit que le maximum de $u_2(t)$ précède celui de $u_1(t)$; **la tension $u_2(t)$ est en avance sur $u_1(t)$.**

TD9 : Oscillateur harmonique - corrigé

Exercice 1 : Evolution temporelle d'un oscillateur harmonique

X_e est la valeur moyenne du signal. Sur le graphique, on lit $\boxed{X_e = 2\,\text{cm}}$.
X_m est l'amplitude du signal, c'est-à-dire la moitié de la valeur crête à crête. On lit $\boxed{X_m = 5\,\text{cm}}$.

La période du signal vaut $T = 50\,\text{ms}$ donc $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 1,3\cdot 10^2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Le signal est maximal, dans l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, à la date $t_m = -9\,\text{ms}$. On en déduit que :

$$\omega_0 t_m + \varphi = 0 \iff \boxed{\varphi = -\omega_0 t_m = 1\,\text{rad}}$$

La vitesse s'écrit $\dot{X}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$. À la date $t = 0$, en valeur absolue, elle vaut :

$$\boxed{v(0) = \omega_0 X_m \sin\varphi = 6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Exercice 2 : Signaux synchrones

Amplitude du signal 1 : $\boxed{U_1 = 5\,\text{V}}$. Amplitude du signal 2 : $\boxed{U_2 = 3\,\text{V}}$.

Les deux signaux ont la même période : $\boxed{T = 100\,\text{ms}}$, donc la même fréquence : $\boxed{f = T^{-1} = 10\,\text{Hz}}$.

La plus petite durée qui sépare deux maxima des signaux 1 et 2 vaut $\Delta t = 17\,\text{ms}$. On en déduit la valeur du déphasage : $\boxed{\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{T}\Delta t = 1,1\,\text{rad}}$.

⋆ Exercice 3 : Oscillations harmoniques

1. La solution générale de l'équation différentielle est $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = x_0$, on montre que $A = x_0$ et $B = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{T_0 v_0}{2\pi}$. On a ainsi :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) + \frac{T_0 v_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)}$$

2. Pour déterminer l'amplitude des oscillations, il faut écrire la position sous la forme $x(t) = X_m(\omega_0 t + \varphi)$. En utilisant une formule trigo, on peut se ramener à l'écriture :

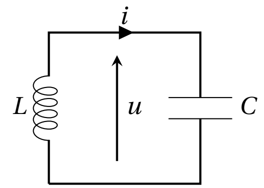
$$x(t) = X_m \cos\varphi \cos(\omega_0 t) - X_m \sin\varphi \sin(\omega_0 t)$$

Par identification avec le résultat de la question 1, X_m et φ doivent vérifier :

$$\begin{cases} X_m \cos\varphi = x_0 & (1) \\ -X_m \sin\varphi = \frac{T_0 v_0}{2\pi} & (2) \end{cases}$$

En écrivant $(1)^2 + (2)^2$, on peut isoler l'amplitude : $\boxed{X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{T_0 v_0}{2\pi}\right)^2} = 8,5\,\text{cm}}$.

⋆ Exercice 4 : Oscillations d'un circuit LC



1. On utilise la loi d'évolution de la bobine et du condensateur (attention, la bobine est en convention générateur) :

$$u = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u}{LC} = 0}$$

2. Par continuité, $u(0^+) = u(0^-) = U_0$ et $i(0^+) = i(0^-) = 0$ (le circuit est ouvert à $t = 0^-$). Puisque $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$, les deux conditions initiales qui permettent de résoudre cette équation différentielle sont :

$$u(0^+) = U_0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$$

Après calculs, on montre que la solution s'écrit : $\boxed{u(t) = U_0\cos(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

La fréquence des oscillations harmoniques vaut $\boxed{f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 3,2\cdot 10^2\,\text{Hz}}$. Leur amplitude vaut $\boxed{U_0 = 6\,\text{V}}$.

3. $\boxed{i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\dfrac{C}{L}}U_0\sin(\omega_0 t)}$. L'amplitude des oscillations de $i(t)$ vaut $\boxed{\sqrt{\dfrac{C}{L}}U_0 = 0,12\,\text{A}}$.

4. $\boxed{\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}Cu^2 = \dfrac{CU_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t)}$, $\boxed{\mathscr{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{CU_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t)}$, $\boxed{\mathscr{E} = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_L = \dfrac{CU_0^2}{2}}$.

L'énergie totale se conserve, ce qui est logique puisqu'il n'y a pas de résistance qui dissipe l'énergie électrique en chaleur.

⋆ Exercice 5 : Oscillation verticales d'un ressort

1. On applique le PFS à la masse en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La masse est soumise à son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ et à la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_z$ du ressort :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$$

On projette cette équation sur $(\text{O}z)$ et on isole ℓ_{eq} :

$$mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \iff \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

2. On applique le PFD à la masse en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

La longueur du ressort est liée à la coordonnée z par la relation : $\ell = \ell_{\text{eq}} + z$. On projette le PDF sur (Oz) :

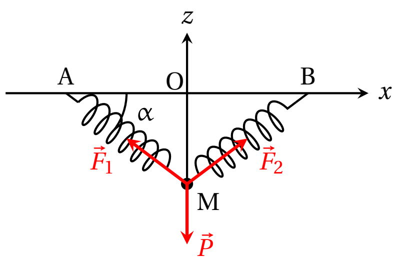
$$m\ddot{z} = mg - k(\ell_{\text{eq}} + z - \ell_0) = -kz \iff \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0}$$

3. La solution générale de cette équation est $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Avec les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = -a$ (ressort comprimé par rapport à sa position d'équilibre), on montre que $B = 0$ et $A = -a$:

$$\boxed{z(t) = -a\cos(\omega_0 t)}$$

La vitesse de la masse vaut $\dot{z}(t) = a\omega_0\sin(\omega_0 t)$. La vitesse maximale vaut $\boxed{v_{\max} = a\omega_0}$.

⋆ Exercice 6 : Masse suspendue à deux ressorts



1. On applique le PFS à la masse en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$ et aux forces de rappel élastique $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ exercées par les ressorts :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

La force de rappel exercée par le ressort de gauche s'écrit : $\vec{F}_1 = -k\overrightarrow{AM}$ (car la longueur à vide est nulle). De même, la force de rappel exercée par le ressort de droite s'écrit : $\vec{F}_2 = -k\overrightarrow{BM}$. On projette le PFS dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} 0 = -ka + ka & \text{sur } \vec{u}_x \\ 0 = 2ka\tan\alpha - mg & \text{sur } \vec{u}_z \end{cases}$$

<u>Rq</u> : la projection de $\vec{F}_1$ sur $\vec{u}_z$ s'obtient en écrivant que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_z = z = -\text{OM}$, avec $\tan\alpha = \frac{\text{OM}}{\text{OA}} = \frac{\text{OM}}{a}$ (même méthode pour $\vec{F}_2$).
La projection du PFS sur $\vec{u}_z$ permet de déterminer l'angle α à l'équilibre. Ce dernier vérifie :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{mg}{2ka}}$$

2. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen projeté sur $\vec{u}_z$:

$$m\ddot{z} = 2kz - mg \iff \ddot{z} + \frac{2k}{m}z = -g$$

L'équation du mouvement est celle d'un OH de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, donc de période propre $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$.

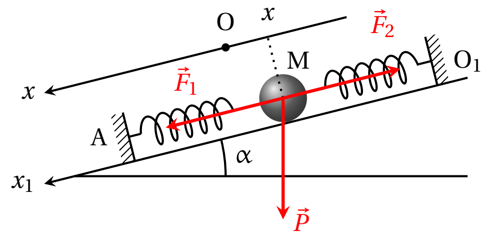
⋆ Exercice 7 : Pendule de longueur variable

Le pendule effectue un mouvement de petites oscillations autour de la verticale. Étant donnée la géométrie du système, le pendule effectue une demi-oscillation avec une longueur $\ell = 1\,\text{m}$ et l'autre demi-oscillation avec une longueur $\frac{\ell}{2} = 50\,\text{cm}$.

Sachant que la période propre d'un pendule simple de longueur ℓ vaut $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, on en déduit que la première demi-oscillation dure $t_1 = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ et la deuxième $t_2 = \pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$. La période des oscillations de ce pendule vaut donc :

$$\boxed{T = \pi(1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{\ell}{2g}} = 1{,}7\,\text{s}}$$

⋆⋆ Exercice 8 : Oscillateur sur un plan incliné



1. On applique le PFS à la masse en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$ et aux forces de rappel élastique $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ exercées par les ressorts :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Le ressort de droite a une longueur $\ell_1 = x_{1e}$ et celui de gauche une longueur $\ell_2 = \text{O}_1\text{A} - \ell_1 = 2\ell_0 - x_{1e}$. On projette le PFS sur $\vec{u}_x$:

$$0 = mg\sin\alpha - k(x_{1e} - \ell_0) + k(2\ell_0 - x_{1e} - \ell_0) = mg\sin\alpha - 2kx_{1e} + 2k\ell_0 \iff \boxed{x_{1e} = \ell_0 + \frac{mg\sin\alpha}{2k}}$$

2. En mouvement, le ressort de droite a une longueur $\ell_1 = x_{1e} + x$ et celui de gauche une longueur $\ell_2 = 2\ell_0 - x_{1e} - x$. On projette le PFD sur $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - k(x + x_{1e} - \ell_0) + k(2\ell_0 - x - x_{1e} - \ell_0) = -2kx \iff \boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0}$$

La solution générale de cette équation est $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. Avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$, on montre que $A = 0$ et $B = \frac{v_0}{\omega_0}$.

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

★★ Exercice 9 : Molécule d'acide chlorhydrique

1. Le centre de gravité O est défini par la relation : $m_1\overrightarrow{\mathrm{OH}} + m_2\overrightarrow{\mathrm{OCl}} = \vec{0}$. Par projection sur $\vec{u}_x$, on obtient la relation : $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$. Sachant que $\ell = x_2 - x_1$, on en déduit que :

$$\boxed{x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\ell} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{m_1}{m_2 + m_1}\ell}$$

2. On applique le PFD à l'atome d'hydrogène dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige toute autre force que celle exercée par le ressort équivalent :

$$m_1\ddot{x}_1 = +k(\ell - \ell_0)$$

Sachant que $\ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{\ell}$, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $\ell(t)$:

$$\boxed{\ddot{\ell} + \frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}\ell = \frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}\ell_0}$$

Cette équation est celle d'un OH de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)k}{m_1 m_2}}$, donc de fréquence propre :

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}}}$$

Cette expression est analogue à celle d'un système avec une masse unique $\left(f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{eq}}}}\right)$ telle que :

$$\boxed{m_{\mathrm{eq}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

Rq : Cette masse m_{eq} est appelée la **masse réduite** de la molécule. Dans cette molécule particulière, l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que celui d'hydrogène : $\frac{m_2}{m_1} \simeq 35$. Par conséquent : $m_{\mathrm{eq}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \simeq m_1$. On remarque également que $x_2 = \frac{m_1}{m_2+m_1}\ell \ll \ell$ tandis que $x_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\ell \simeq -\ell$.
En première approximation, l'atome de chlore étant bien plus massif que celui d'hydrogène, on peut supposer **qu'il est fixe dans le référentiel d'étude**.

3. Connaissant le nombre d'onde, on peut déterminer numériquement la fréquence propre de vibration de la molécule de HCl :

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \sigma c = 8{,}97 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$$

En assimilant la molécule à un système masse + ressort dans lequel seul l'atome d'hydrogène est mobile, on en déduit que :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}} \iff \boxed{k = 4\pi^2 f_0^2 m_1 = 530\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}$$