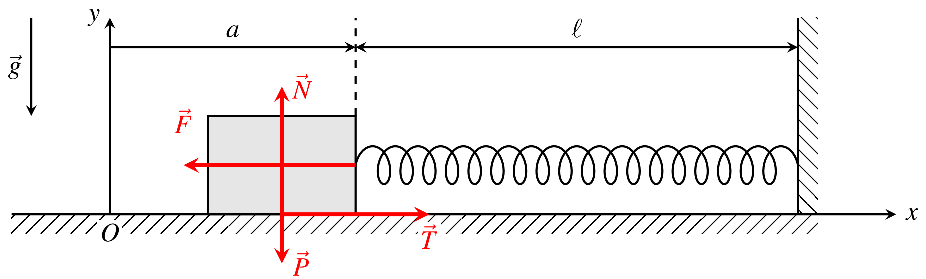
Corrigé DM10

Exercice : Oscillations amorties par frottement solide



1. On suppose la masse en adhérence avec le support. Elle est soumise à son poids $\vec{P}$, à la force de rappel du ressort $\vec{F} = k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$ et aux réactions normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$ du support. La longueur du ressort vaut $\ell = \ell_0 - a$ donc $\vec{F} = -ka\vec{u}_x$. On raisonne de manière générale avec une déformation a quelconque du ressort qui peut être positive (ressort comprimé) ou négative (ressort étiré). Comme le sens de la réaction tangentielle n'est pas connue *a priori* on notera $\vec{T} = T\vec{u}_x$, avec T une coordonnée de signe indéterminé. On applique le principe fondamental de la statique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{T}$. On projette dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$:

$$\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 0 \\ -mg \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} -ka \\ 0 \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} T \\ 0 \end{matrix}\right. \iff \begin{cases} T = ka & (E_x) \\ \|\vec{N}\| = mg & (E_y) \end{cases}$$

La masse adhère au support donc la première loi de Coulomb s'applique :

$$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\| \iff k|a| < fmg \iff \boxed{|a| < a_m = \frac{fmg}{k}}$$

2. La déformation initiale du ressort est $a > a_m > 0$. Le ressort est comprimé et la masse ne peut adhérer au support, elle va donc glisser. Dans une position quelconque de la masse on a $\ell(t) = \ell_0 - x$ et $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$. Dans cette première phase du mouvement où le ressort est initialement comprimé la masse glisse vers les x décroissants donc $\vec{T}$ est orientée selon $+\vec{u}_x$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse, projeté dans la base d'étude :

$$\left|\begin{matrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 0 \\ -mg \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} -kx \\ 0 \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} \|\vec{T}\| \\ 0 \end{matrix}\right. \iff \begin{cases} m\ddot{x} = -kx + \|\vec{T}\| & (E_x) \\ \|\vec{N}\| = mg & (E_y) \end{cases}$$

Il y a glissement donc la deuxième loi de Coulomb s'applique : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg$. L'équation (E_x) devient : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = fg}$.

3. On identifie la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$. On détermine une solution particulière en résolvant l'équation sans dérivée : $x_p = \frac{fmg}{k} = a_m$. La solution générale s'écrit : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + a_m$. Avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$ on trouve : $\boxed{x(t) = (a - a_m)\cos(\omega_0 t) + a_m}$.

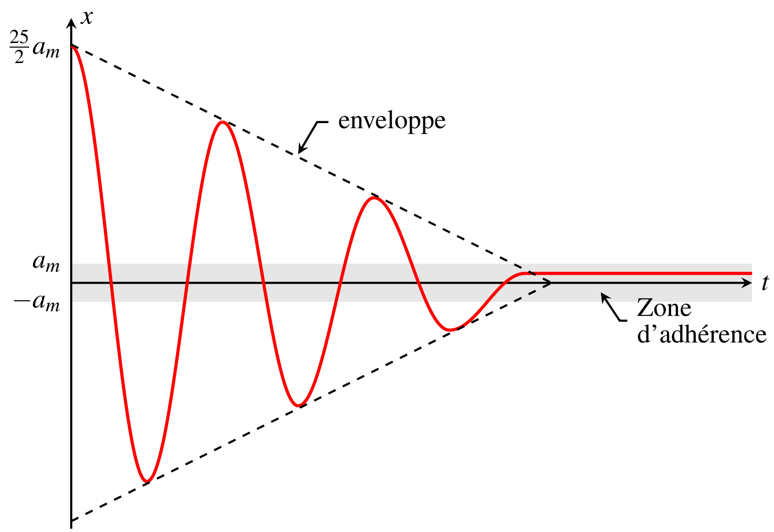
À l'instant initial $t = 0$ la position $x(t)$ est maximale ($\cos(\omega_0 t) = 1$). La masse s'arrête pour la première fois après une demi-oscillation, lorsque $x(t)$ devient minimale ($\cos(\omega_0 t) = -1$). Cela se produit à la date $\boxed{t_1 = T_0/2 = \pi/\omega_0}$. La position correspondante est $\boxed{x_1 = -a + 2a_m}$. À cet instant : $|x_1| = a - 2a_m = \frac{21}{2}a_m > a_m$ donc le solide ne peut pas adhérer au support, il se met à glisser en sens inverse.

4. On raisonne comme à la question précédente. Cette fois-ci la réaction tangentielle est dirigée selon $-\vec{u}_x$ donc (E_x) devient : $m\ddot{x} = -kx - \|\vec{T}\|$. L'équation (E_y) est inchangée et la deuxième loi de Coulomb s'applique encore : $\|\vec{T}\| = fmg$. L'équation du mouvement est désormais la suivante : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -fg}$.

5. La solution générale dans la deuxième phase du mouvement est : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) - a_m$. Sachant que $x(t_1) = -a + 2a_m$ et $\dot{x}(t_1) = 0$ on trouve $\boxed{x(t) = (-a + 3a_m)\cos(\omega_0(t - t_1)) - a_m}$.

À la date t_1 la position $x(t)$ est minimale. La masse s'arrête pour la fois suivante après une nouvelle demi-oscillation, lorsque $x(t)$ devient maximale à nouveau. Cela se produit à la date $\boxed{t_2 = 2\pi/\omega_0}$ et la position correspondante est $\boxed{x_2 = a - 4a_m}$. À cet instant la position est telle que : $|x_2| = a - 4a_m = \frac{17}{2}a_m > a_m$ donc le solide ne peut toujours pas adhérer au support.

6. On remarque qu'à chaque demi-oscillation la déformation du ressort quand la masse s'immobilise diminue de $2a_m$. Le mouvement se poursuit ainsi jusqu'à ce que la masse finisse par s'arrêter dans une position telle que $|x_{\text{arrêt}}| < a_m$. Dans le cas présent cela se produit après le sixième glissement puisque $x_6 = \frac{a_m}{2}$ et $|x_6| < a_m$. La masse s'arrête définitivement dans la position $\boxed{x_f = a_m/2}$. On trace l'allure de $x(t)$ en mettant en évidence le domaine d'adhérence. La masse s'arrête définitivement si sa vitesse s'annule dans cette zone.



<u>Remarque</u> : L'amortissement par frottement solide se caractérise par une décroissance **linéaire** de l'amplitude des oscillations, comme on le voit à l'enveloppe de la courbe.