CHAPITRE 11 — Mouvements dans les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

L'interaction électromagnétique est l'une des quatre interactions fondamentales de la nature (avec l'interaction gravitationnelle, l'interaction nucléaire faible et l'interaction nucléaire forte). C'est elle qui détermine les propriétés de la matière à l'échelle macroscopique (propriétés mécaniques, électriques, thermiques, optiques, etc) et qui permet de comprendre la réactivité des espèces chimiques. Dans ce chapitre nous abordons les effets mécaniques des champs électriques et magnétiques dans le cadre le plus simple possible :

- Les systèmes étudiés sont des particules élémentaires, chargées électriquement, assimilées à des points matériels (électron, proton, ion ou noyau par exemple).
- On étudie séparément les effets électriques et magnétiques ; le champ est électrique ou magnétique, mais pas une superposition des deux.
- Qu'il soit électrique ou magnétique le champ est **stationnaire** (indépendant du temps) et **uniforme** (indépendant de la position dans l'espace).
- On se restreint à des mouvements rectilignes ou plans.

L'objectif consiste à mettre en œuvre les éléments de mécanique abordés dans les chapitres précédents (cinématique, PFD, théorèmes énergétiques) pour étudier quelques applications pratiques : accélérateur de particule, tube cathodique ou spectromètre de masse par exemple. Ceci étant dit, nous verrons quelques écarts à ces règles dans les exercices pour traiter des situations très classiques qui restent abordables en termes mathématiques.

1 Champ électrique stationnaire et uniforme

1.1 Force de Lorentz électrique

Force de Lorentz électrique

Une charge ponctuelle q plongée dans un champ électrique $\vec{E}$ est soumise à la *force de Lorentz électrique* :

$$\vec{F_e} = q\vec{E}$$

Pour un champ $\vec{E}$ stationnaire et uniforme cette force est **constante**. Elle est de même sens que $\vec{E}$ pour une charge positive et de sens contraire à $\vec{E}$ pour une charge négative.

Remarque : Un champ électrique s'exprime en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$, il est homogène au quotient d'une tension et d'une longueur (on en reparlera plus tard dans cette partie).

D'un point de vue pratique l'étude du mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ $\vec{E}$ stationnaire et uniforme est semblable à celui d'une chute libre (le poids est également une force constante), à la différence que le poids est toujours vertical tandis qu'un champ électrique peut être de direction quelconque.

Poids et force électrique à l'échelle d'une particule élémentaire

On compare en ordres de grandeur le poids d'une particule élémentaire et la force électrique qui s'exerce sur elle. On prend comme valeurs typiques : $m \sim 10^{-26}\,\text{kg}$, $|q| \sim 10^{-19}\,\text{C}$ et $\|\vec{E}\| \sim 10^{2}\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ (champ modéré) :

$$\begin{cases} \|\vec{P}\| = mg \sim 10^{-25}\,\text{N} \\ \|\vec{F_e}\| = |q|\|\vec{E}\| \sim 10^{-17}\,\text{N} \end{cases} \implies \frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F_e}\|} \sim 10^{-8} \ll 1$$

Dans toutes les expériences étudiées dans ce chapitre **on négligera le poids de la particule élémentaire devant la force électrique**.

1.2 Étude avec le PFD : calcul de trajectoire

En résumé

- Définir le référentiel et le repère d'étude ;
- Appliquer le PFD et projeter pour obtenir les équations du mouvement ;
- Intégrer deux fois pour obtenir les équations horaires.

Exemple

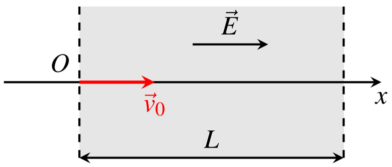
Un considère un champ électrique stationnaire et uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_x$ (avec $E > 0$) entre les plans $x = 0$ et $x = L$. Le champ est nul partout ailleurs. Un électron de masse m est lancé à $t = 0$ avec une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$ (telle que $v_0 > 0$) en $x = 0$.

1. Déterminer $x(t)$ pour $t \geq 0$.

2. Déterminer la valeur minimale de v_0 qui permet à l'électron de sortir du champ électrique en $x = L$.

► **Mettre en œuvre le PFD**

1. L'électron possède une charge $q = -e$. Il est soumis à la force électrique $\vec{F_e} = -eE\vec{u}_x$. On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{F_e}$. On projette sur $\vec{u}_x$: $\ddot{x} = \frac{-eE}{m}$.



On intègre deux fois avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\dot{x}(t) = \frac{-eE}{m}t + v_0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{x(t) = -\frac{eE}{2m}t^2 + v_0 t}$$

Ces expressions sont valables uniquement dans le champ électrique, pour $0 \leq x \leq L$. Si l'électron sort du champ électrique en $x = L$ il n'est plus soumis à aucune force et son mouvement devient rectiligne uniforme.

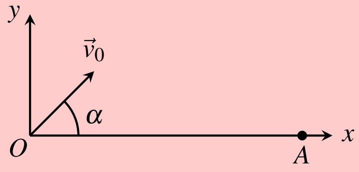
► **Analyser la trajectoire**

2. Il y a plusieurs manière de répondre à cette question. Par exemple on cherche à quel endroit l'électron s'arrête et repart en sens inverse. La vitesse s'annule à la date $t_a = \frac{mv_0}{eE}$. L'électron se trouve alors dans la position $x_a = \frac{mv_0^2}{2eE}$. L'électron réussit à sortir du champ électrique en $x = L$ à condition que $x_a > L$:

$$\frac{mv_0^2}{2eE} > L \iff \boxed{v_0 > v_{0,\min} = \sqrt{\frac{2eEL}{m}}}$$

Application 1

Une particule de charge q et de masse m est lancée depuis l'origine d'un repère (Oxy) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α par rapport à l'axe (Ox), dans un champ électrique stationnaire et uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_y$.



1. À quelle condition sur les signes de q et E la particule peut-elle atteindre A ?

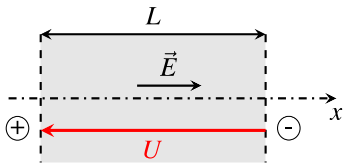
2. Déterminer les équations horaires du mouvement.

3. Déterminer la position x_A du point A.

1.3 Champ électrique et tension

Tension et champ électrique

Lorsqu'un générateur crée un champ électrique stationnaire et uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_x$ entre les plans $x = 0$ et $x = L$ il apparaît une tension U entre ces plans telle que :



- Le champ $\vec{E}$ est dirigé **vers le potentiel le plus faible** (symbolisé par - sur la figure ci-contre).
- La tension (mesurée positivement) et le champ $\vec{E}$ sont reliés par : $\boxed{U = \|\vec{E}\|L}$.

Remarque : Une particule de charge positive est soumise à une force $\vec{F}_e$ de même sens que $\vec{E}$ donc dirigé vers le potentiel le plus faible. À l'inverse une particule de charge négative est soumise à une force $\vec{F}_e$ en sens contraire de $\vec{E}$ donc dirigée vers le potentiel le plus fort. C'est cohérent avec les propriétés vues en électricité et on les garde en tête car elles sont utiles dans ce chapitre :

- Une particule de charge $q > 0$ est attirée vers le potentiel le plus faible ("borne -").
- Une particule de charge $q < 0$ est attirée vers le potentiel le plus élevé ("borne +").

Remarque : On voit à la relation $U = \left\|\vec{E}\right\| L$ qu'un champ électrique est bien homogène au quotient d'une tension et d'une longueur.

1.4 Énergie potentielle de la force de Lorentz électrique

Énergie potentielle et potentiel électrique

Quand elle est plongée dans un champ électrique stationnaire et uniforme la force de Lorentz électrique qui s'exerce sur une charge q est conservative et son énergie potentielle au point M vaut :

$$E_p(M) = qV(M)$$

où $V(M)$ est le **potentiel électrique** au point M. Cette relation confirme qu'un potentiel électrique est défini *à une constante près*.

Remarque : La force électrique est conservative donc **l'énergie mécanique de la particule** $E = \frac{1}{2}mv^2 + qV$ **se conserve au cours du mouvement**.

Travail de la force électrique

Le travail de la force électrique qui s'exerce sur une charge ponctuelle q en mouvement d'un point A vers un point B vaut :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_e) = -\Delta E_p = q(V_A - V_B) = qU_{AB}$$

où $U_{AB} = V_A - V_B$ est la différence de potentiel entre A et B.

1.5 Étude énergétique : relier vitesse et tension

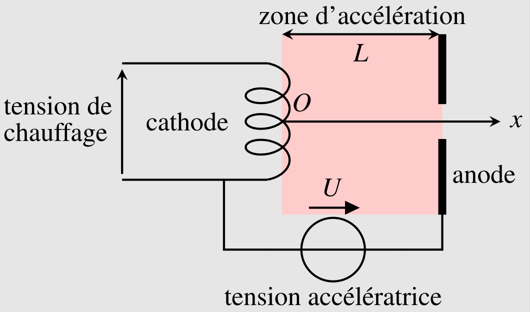
En résumé

• Définir le référentiel et le repère d'étude ;

• Appliquer le TEC ou bien utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour relier la vitesse de la particule à la tension imposée.

Exemple

Un canon à électrons est un dispositif qui produit un faisceau d'électrons dans une direction donnée avec une vitesse qui peut être fixée par l'expérimentateur. Il est constitué d'une cathode métallique à laquelle on arrache des électrons de masse m_e par chauffage. Ces électrons sont ensuite accélérés le long d'un axe (Ox) par un champ électrique supposé stationnaire et uniforme, sur une distance L, en direction d'une anode. La vitesse d'éjection des électrons dépend de la tension U qu'un générateur haute tension impose entre les deux électrodes (voir schéma ci-dessous).



1. Quel doit être le signe de U pour que les électrons soient accélérés vers l'anode ?

2. On néglige la vitesse des électrons quand ils quittent la cathode. Déterminer leur vitesse v quand ils atteignent l'anode.

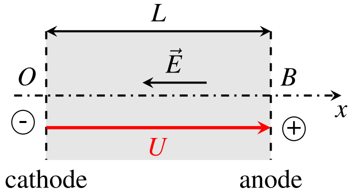
3. Exprimer le champ électrique dans la zone d'accélération en fonction de U.

4. Déterminer la durée T de l'accélération en fonction de L et v.

5. *Application numérique* : charge élémentaire : $e = 1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_e = 9,1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $U = 1,0\,\mathrm{kV}$, $L = 50\,\mathrm{cm}$. Calculer v et T.

► Déterminer le signe d'une tension accélératrice

1. Les électrons sont chargés négativement donc ils sont accélérés en direction du potentiel électrique le plus élevé. On indique sur la figure ci-contre la polarité des électrodes et on en déduit le signe de la tension accélératrice : $\boxed{U = V_B - V_O > 0}$.



► Mener une étude énergétique

2. On traduit en équation la conservation de l'énergie mécanique entre le point O (vitesse nulle) et le point B (vitesse v). On rappelle que l'électron a une charge $q = -e$:

$$-eV_O = \frac{1}{2}m_e v^2 - eV_B \iff \boxed{v = \sqrt{\frac{2e(V_B - V_O)}{m_e}} = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}}$$

► **Relier champ électrique et tension**

3. Le champ électrique est dirigé vers le potentiel le plus faible, donc il est orienté selon $-\vec{u}_x$. On sait également que $\|\vec{E}\| = \frac{U}{L}$. On en déduit que $\boxed{\vec{E} = -\frac{U}{L}\vec{u}_x}$.

► **Mettre en œuvre le PFD**

4. L'électron est soumis à la force électrique $\vec{F_e} = -e\vec{E} = \frac{eU}{L}\vec{u}_x$. On applique le PFD à l'électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, projeté sur $\vec{u}_x$: $\ddot{x} = \frac{eU}{m_e L}$. On intègre deux fois successivement avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ et on obtient : $\dot{x}(t) = \frac{eU}{m_e L}t$ et $x(t) = \frac{eU}{2m_e L}t^2$. L'électron atteint l'anode à la date T telle que $x(T) = L$:

$$\frac{eU}{2m_e L}T^2 = L \iff \boxed{T = \sqrt{\frac{2m_e L^2}{eU}} = \frac{2L}{v}}$$

Remarque : Il est interdit d'écrire $T = \frac{L}{v}$ car le mouvement de l'électron n'est **pas** uniforme à la vitesse v. En fait le calcul ci-dessus montre que la vitesse moyenne de l'électron entre la cathode et l'anode est égale à $v/2$, ce qui est logique puisque son accélération est constante donc la vitesse augmente linéairement de 0 à v pendant la phase d'accélération.

5. L'application numérique donne : $\boxed{v = 1,9 \cdot 10^7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$ et $\boxed{T = 53\,\mathrm{ns}}$.

Application 2

Calculer la taille minimale d'un accélérateur de particule dans lequel des protons de charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et masse $m = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ sont accélérés en ligne droite jusqu'à une vitesse égale à 10% de la vitesse de la lumière $c = 3,0 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, sachant que le champ électrique en norme ne peut pas dépasser $E_{\max} = 4,0 \cdot 10^6\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. On néglige la vitesse initiale des protons.

2 Champ magnétique stationnaire et uniforme

2.1 Force de Lorentz magnétique

Force de Loretntz magnétique

Une charge ponctuelle q en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumise à la *force de Lorentz magnétique* :

$$\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

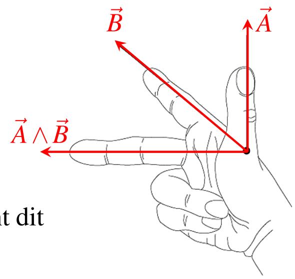
Remarque : Un champ magnétique s'exprime en teslas (T).

Le champ magnétique terrestre est d'environ 50 µT à proximité de la surface, celui créé à proximité d'un aimant usuel est de l'ordre de 0,1 T. À l'heure actuelle les champs magnétiques stationnaires d'origine humaine les plus élevés peuvent atteindre plusieurs dizaines de teslas et sont produits par des aimants supraconducteurs maintenus à des températures de quelques kelvins.

2.2 Produit vectoriel

La force magnétique fait intervenir le **produit vectoriel** $\vec{v}\wedge\vec{B}$. Avant de discuter des propriétés de la force magnétique il faut faire le point sur ce qu'est un produit vectoriel et la façon dont on le calcule.

Propriétés du produit vectoriel



Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs quelconques. Le produit vectoriel noté $\vec{A}\wedge\vec{B}$ **est également un vecteur**.

- si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires alors $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$;
- si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont pas colinéaires alors :
  - $\vec{A}\wedge\vec{B}$ est orthogonal à la fois à $\vec{A}$ et $\vec{B}$, autrement dit il est orthogonal au plan $(\vec{A},\vec{B})$;
  - son sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite (voir figure ci-contre). On a représenté le cas où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux mais le principe est le même s'ils ne le sont pas.
  - sa norme vaut : $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\left|\sin(\vec{A},\vec{B})\right|$.

Antisymétrie : $\forall(\vec{A},\vec{B}) \;:\; \vec{B}\wedge\vec{A} = -\vec{A}\wedge\vec{B}$

Distributivité : $\forall(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) \;:\; \begin{cases}(\vec{A}+\vec{B})\wedge\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{C}+\vec{B}\wedge\vec{C}\\ \vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C}\end{cases}$

Linéarité : $\forall(\vec{A},\vec{B})$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \begin{cases}(\lambda\vec{A})\wedge\vec{B} = \lambda(\vec{A}\wedge\vec{B})\\ \vec{A}\wedge(\mu\vec{B}) = \mu(\vec{A}\wedge\vec{B})\end{cases}$

Produit vectoriel et base orthonormée directe

Soit $\mathscr{B}=(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ une base orthonormée directe. Chaque vecteur de cette base peut être obtenu à partir du produit vectoriel des deux autres, avec un signe + si l'ordre des vecteurs dans le produit vectoriel est le même que dans la base (sens direct) et - si l'ordre des vecteurs dans le produit vectoriel est inversé par rapport à celui de la base (sens indirect). On illustre le propos en page suivante.

Sens direct : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)\,(\vec{u}_x, \ldots$: $\begin{cases} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{cases}$

Sens indirect : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)\,(\vec{u}_x, \ldots$: $\begin{cases} \vec{u}_y \wedge \vec{u}_x = -\vec{u}_z \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -\vec{u}_x \\ \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_y \end{cases}$

Calcul d'un produit vectoriel à partir des coordonnées des vecteurs

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (A_x, A_y, A_z) et (B_x, B_y, B_z) dans une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Les trois composantes de $\vec{A} \wedge \vec{B}$ dans la base $\mathscr{B}$ se calculent de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} B_x \\ B_y \\ B_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{array} \right.$$

On peut le vérifier en écrivant $\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z) \wedge (B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z)$ et en développant grâce aux propriétés présentées précédemment. Cependant il existe un moyen mnémotechnique pour retrouver plus rapidement cette expression, appelée "règle du gamma" et illustrée ci-dessous.

1$^{\text{ère}}$ ligne : on trace un "gamma" avec les lignes 2 et 3 de $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$$\left| \begin{array}{l} \cancel{A_x} \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} \cancel{B_x} \\ B_y \\ B_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{array} \right.$$

2$^{\text{ème}}$ ligne : on trace un "anti-gamma" avec les lignes 3 et 1 de $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$$\left| \begin{array}{l} A_x \\ \cancel{A_y} \\ A_z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} B_x \\ \cancel{B_y} \\ B_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{array} \right.$$

3$^{\text{ème}}$ ligne : on trace un "gamma" avec les lignes 1 et 2 de $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$$\left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ \cancel{A_z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} B_x \\ B_y \\ \cancel{B_z} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{array} \right.$$

2.3 Propriétés de la force magnétique

Poids et force magnétique à l'échelle d'une particule élémentaire

On compare en ordres de grandeur le poids d'une particule élémentaire et la force magnétique qui s'exerce sur elle. On prend comme valeurs typiques : $m \sim 10^{-26}\,\mathrm{kg}$, $|q| \sim 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $v = 10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\|\vec{B}\| \sim 10^{-4}\,\mathrm{T}$ (champ modéré) :

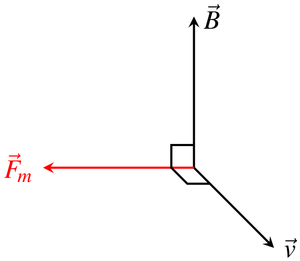
$$\begin{cases} \|\vec{P}\| = mg \sim 10^{-25}\,\mathrm{N} \\ \|\vec{F}_m\| \sim |q|v\|\vec{B}\| \sim 10^{-17}\,\mathrm{N} \end{cases} \implies \frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_m\|} \sim 10^{-8} \ll 1$$

Dans toutes les expériences étudiées dans ce chapitre **on négligera le poids de la particule élémentaire devant la force magnétique**.

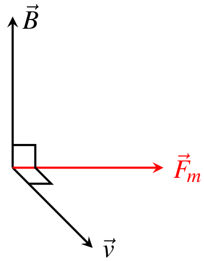
Direction et sens de la force magnétique

D'après les propriétés du produit vectoriel la force magnétique est orthogonale à tout instant au vecteur vitesse et au champ magnétique. Pour déterminer le sens de $\vec{v} \wedge \vec{B}$ on utilise la règle des trois doigts de la main droite.

⚠ Le sens de $\vec{F}_m$ dépend également **du signe de la charge**.



charge $q > 0$



charge $q < 0$

Travail de la force magnétique

La force magnétique est toujours orthogonale au mouvement ; **elle ne travaille pas**.

$$\mathscr{P}(F_m) = 0$$

On en déduit qu'une particule soumise uniquement à l'action de la force magnétique possède un mouvement **uniforme**. La force magnétique courbe la trajectoire d'une particule sans modifier sa vitesse en norme.

2.4 Calcul de trajectoire dans un champ $\vec{B}$ stationnaire et uniforme avec vitesse initiale orthogonale au champ

Il existe différentes méthodes pour déterminer la trajectoire d'une particule dans un champ magnétique. On en propose une qui permet d'accéder aux équations horaires.

En résumé

• Se placer dans un repère cartésien avec l'un des axes colinéaire au champ $\vec{B}$ (par exemple (Oz));

• Appliquer le PFD et déterminer un système d'équations vérifiées par les coordonnées (v_x, v_y, v_z) du vecteur vitesse $\vec{v}$.

• Montrer que le mouvement est plan si la vitesse initiale est orthogonale à $\vec{B}$.

• Découpler les équations vérifiées par $v_x(t)$ et $v_y(t)$. Les résoudre puis intégrer à nouveau pour obtenir $x(t)$ et $y(t)$.

Exemple

Dans un référentiel $(\mathscr{R})$ galiléen associé à un repère cartésien $(Oxyz)$, une particule de masse m et de charge e se trouve à la date $t = 0$ en O avec la vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$. Il règne dans tout l'espace un champ magnétique uniforme et indépendant du temps : $\vec{B} = B\vec{u}_z$ avec $B > 0$.

1. Établir les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse. En déduire $z(t)$.

2. Montrer que $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont solutions d'une équation d'oscillateur harmonique dont on donnera la pulsation propre ω_0.

3. Déterminer $v_x(t)$ et $v_y(t)$, puis $x(t)$ et $y(t)$.

4. Montrer que la trajectoire est circulaire et exprimer son rayon R en fonction des données. Exprimer la durée T d'une révolution.

5. Tracer l'allure de la trajectoire.

► **Projeter $\vec{F}_m$ dans la base cartésienne et mettre en œuvre le PFD**

1. La particule est soumise à la force magnétique $\vec{F}_m$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel $(\mathscr{R})$: $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_m$. On projette la force magnétique dans la base cartésienne :

$$\vec{F}_m = -e\vec{v}\wedge\vec{B} = -e\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -eBv_y \\ eBv_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

On projette le PFD dans la base cartésienne et on en déduit les équations du mouvement :

$$\left|\begin{array}{l} m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} -eBv_y \\ eBv_x \\ 0 \end{array}\right. \iff \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{eB}{m}v_y & (E_x) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{eB}{m}v_x & (E_y) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 & (E_z) \end{cases}$$

On intègre deux fois successivement l'équation (E_z) avec les conditions initiales $v_z(0) = 0$ et $z(0) = 0$. On obtient : $v_z(t) = \dot{z}(t) = 0\ \forall t$ et $\boxed{z(t) = 0\ \forall t}$. **Le mouvement de la particule est contenu dans le plan** (Oxy).

► **Découpler les équations vérifiées par v_x et v_y**

2. Les coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ vérifient le système d'équations différentielles couplées $\{(E_x),(E_y)\}$. Pour résoudre ces équations il faut établir un système dans lequel les variables v_x et v_y sont séparées dans deux équations distinctes (on dit qu'on *découple* le système). Pour y parvenir on dérive l'équation (E_x) par rapport au temps puis on utilise l'équation (E_y) :

$$\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{eB}{m}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x = 0}$$

On raisonne de la même manière avec l'équation (E_y) :

$$\frac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{eB}{m}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_y \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_y = 0}$$

Les coordonnées v_x et v_y sont toutes les deux solutions de la même équation, caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = eB/m}$.

► **Obtenir les lois horaires par intégration**

3. La solution générale de ces équations différentielles est :

$$v_x(t) = A_1\cos(\omega_0 t) + B_1\sin(\omega_0 t) \qquad \text{et} \qquad v_x(t) = A_2\cos(\omega_0 t) + B_2\sin(\omega_0 t)$$

On a besoin de quatre conditions initiales (deux par équations) : $v_x(0)$, $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(0)$, $v_y(0)$ et $\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}(0)$. On en connaît déjà deux, données dans l'énoncé : $v_x(0) = v_0$ et $v_y(0) = 0$. On obtient les deux autres grâce aux équations (E_x) et (E_y) :

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{eB}{m}v_y(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{eB}{m}v_x(0) = \omega_0 v_0$$

Avec ces quatre conditions initiales on montre que :

$$\boxed{v_x(t) = v_0\cos(\omega_0 t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{v_y(t) = v_0\sin(\omega_0 t)}$$

On intègre à nouveau pour avoir les coordonnées du vecteur position. Avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$ on montre que :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}(1-\cos(\omega_0 t))}$$

► **Passer des équations horaires à l'équation cartésienne**

4. On cherche à éliminer le temps pour obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire. On utilise l'identité $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$:

$$\frac{\omega_0^2}{v_0^2}x^2 + \left(1 - \frac{\omega_0}{v_0}y\right)^2 = 1 \iff x^2 + \left(y - \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$$

Équation cartésienne d'un cercle

L'équation cartésienne d'un cercle de centre $C\,:\,(x_0, y_0)$ et de rayon R s'écrit :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

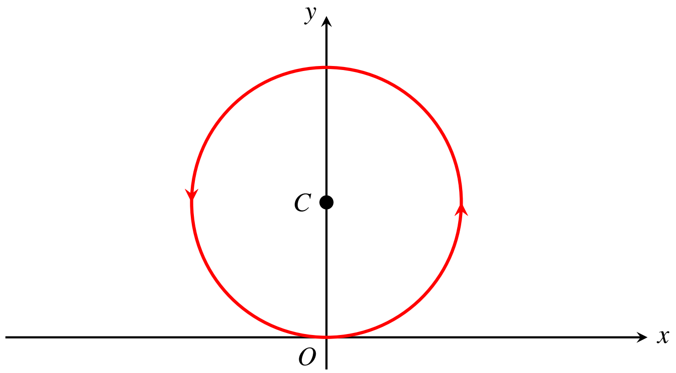
L'équation cartésienne que nous avons obtenu est celle d'un cercle. On identifie la centre et le rayon de la trajectoire :

$$C\,:\,(0,R) \qquad \text{et} \qquad \boxed{R = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{mv_0}{eB}}$$

La force magnétique ne travaille pas donc le mouvement de la particule est uniforme à la vitesse v_0. Au cours d'une révolution elle parcourt la distance $2\pi R$ (périmètre de la trajectoire circulaire) en une durée : $\boxed{T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{eB}}$.

► **Tracer l'allure de la trajectoire**

5. À partir des résultats précédents on peut tracer l'allure de la trajectoire.



Application 3

Dans un référentiel $(\mathscr{R})$ galiléen attaché à un repère cartésien $(Oxyz)$, une particule de masse m et charge q se trouve à la date $t = 0$ en O, au repos, dans une région où règne les champ uniformes et indépendants du temps : $\vec{E} = E\vec{u}_y$ et $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

1. Établir les équations du mouvement de M. En déduire $z(t)$.

2. Montrer que $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont solutions d'une équation d'oscillateur harmonique dont on donnera la pulsation propre ω_0.

3. Calculer les valeurs moyennes temporelles $\langle v_x(t)\rangle$ et $\langle v_y(t)\rangle$. En déduire que la particule dérive avec une vitesse $\vec{v}_D$ à exprimer en fonction des données.

4. Déterminer la trajectoire de la particule, sous forme paramétrique $(x(\xi), y(\xi))$, en supposant $q > 0$ et en utilisant la variable réduite $\xi = \omega_0 t$. On notera $R = \frac{mv_D}{qB}$ avec $v_D = \|\vec{v}_D\|$.

2.5 Analyse d'une trajectoire circulaire

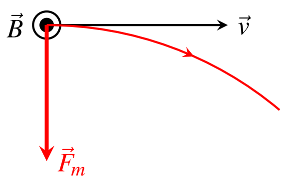
On vient d'établir l'équation de la trajectoire circulaire dans un cas particulier. On généralise ci-dessous les propriétés du mouvement pour une charge q quelconque.

Trajectoire circulaire dans un champ magnétique

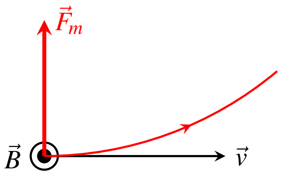
Une particule de masse m et de charge q est plongée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$ et lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}$ orthogonale à $\vec{B}$. Son mouvement est :

- uniforme de vitesse $v = \|\vec{v}\|$;
- circulaire de rayon $R = \dfrac{mv}{|q|B}$ avec $B = \|\vec{B}\|$.

À partir du rayon on retrouve rapidement la période de révolution : $T = \frac{2\pi R}{v}$. Pour connaître le sens de déviation de la particule il est commode de déterminer le sens de la force magnétique en un point quelconque de la trajectoire grâce à la règle des trois doigts de la main droite. On illustre ci-dessous sur un exemple.



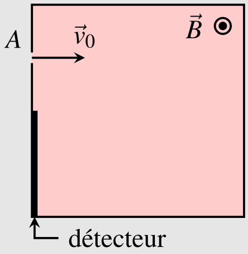
Particule de charge $q > 0$ déviée "vers le bas"



Particule de charge $q < 0$ déviée "vers le haut"

Exemple

La spectrométrie de masse est une technique physique d'analyse extrêmement précise qui permet de détecter et identifier des molécules en fonction de leur masse. On considère deux particules de masses m_1 et $m_2 > m_1$, de même charge q qui entrent en A avec la même vitesse $\vec{v}_0$, dans un spectromètre de masse dans lequel règne un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$ (voir figure ci-contre). On note $v_0 = \|\vec{v}_0\|$.



1. Déterminer le signe de q pour que les particules soient déviées vers le détecteur. Tracer l'allure de leurs trajectoires dans le spectromètre.

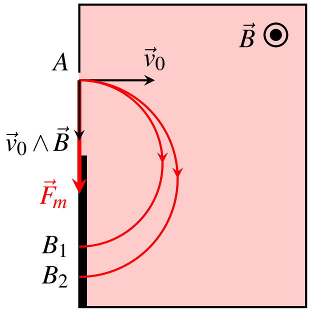
2. Déterminer la distance d qui sépare les impacts des particules sur le détecteur.

3. *Application numérique* : masse d'un nucléon : $m_p \simeq m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$, $v_0 = 5,8 \cdot 10^5\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $|q| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $B = 0,12$ T. Calculer d pour :

- les molécules de méthane $^{12}CH_4$ et ^{13}CH4 qui diffèrent par l'isotope du carbone,
- le monoxyde de carbone et le diazote (avec les isotopes ^{12}C, ^{14}N et ^{16}O), de masses respectives $m(\text{CO}) = 28,000\,u$ et $m(\text{N}_2) = 28,006\,u$, où u est l'unité de masse atomique unifiée : $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

► Déterminer le sens de déviation d'une particule dans un champ $\vec{B}$

1. Les particules ont une trajectoire circulaire dans le champ magnétique. Elle doivent être déviées vers le "bas" pour atteindre le détecteur. Pour cela la force magnétique $\vec{F}_m$ au point A doit être dirigée vers le détecteur (voir figure ci-contre). On trace également sur le schéma le vecteur $\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$. On constate que $\vec{F}_m$ et $\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ sont de même sens, or au point A : $\vec{F}_m = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$. On conclut que les particules doivent avoir une charge $q > 0$ pour être déviées vers le détecteur.



On exprime les rayons des deux trajectoires : $R_1 = \frac{m_1 v_0}{qB}$ et $R_2 = \frac{m_2 v_0}{qB}$. Tous les paramètres sont identiques à l'exception des masses ; le rayon est plus élevé pour la masse m_2. Ainsi les deux particules, partant du même point A, viennent frapper le détecteur en des points différents (point d'impact B_1 pour la masse m_1 et B_2 pour la masse m_2).

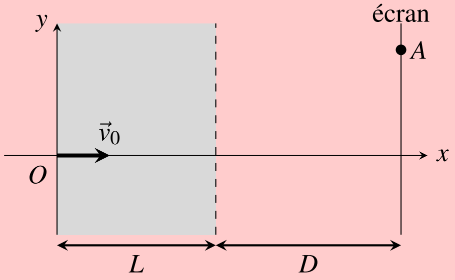
2. Chaque trajectoire est un demi-cercle entre A et le détecteur. La distance entre A et le point d'impact sur le détecteur est égal au diamètre : $AB_1 = 2R_1$ et $AB_2 = 2R_2$. La distance entre les deux points d'impact vaut donc $\boxed{d = B_1B_2 = 2(R_2 - R_1) = \frac{2(m_2 - m_1)v_0}{qB}}$.

3. Les deux molécules de méthane diffèrent par la présence d'un neutron supplémentaire dans le carbone 13 par rapport au carbone 12, donc $m_2 - m_1 = m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg et on trouve $\boxed{d = 10\,\text{cm}}$. Pour le monoxyde de carbone et le diazote on trouve : $\boxed{d = 0,60\,\text{mm}}$.

Application 4

Des électrons de masse m pénètrent en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ dans un domaine de largeur L où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ stationnaire et uniforme. Le champ est nul partout ailleurs.

Un écran est placé à la distance $D + L$ du point O.



1. Représenter l'allure de la trajectoire d'un électron qui atteint le point A de l'écran. Quel doit être le signe de B ?

2. Montrer que les électrons :

- sont déviés par le champ magnétique d'un angle α tel que : $\sin\alpha = \dfrac{e|B|L}{mv_0}$;
- sortent du champ $\vec{B}$ avec un déplacement selon (Oy) : $y_s = \dfrac{mv_0}{e|B|}(1 - \cos\alpha)$.

3. Déterminer $|B|$ pour que les électrons atteignent le point A de coordonnée y_A. On suppose qu'ils sont sont faiblement déviés ($\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha$ et $\cos\alpha \simeq 1$).

4. AN : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $v_0 = 1,0 \cdot 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $L = 3\,\text{cm}$, $D = 20\,\text{cm}$, $y_A = 5\,\text{cm}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Calculer $|B|$.