TD10 : Énergétique - corrigé

Application 1

On suppose que l'anneau atteint le sommet S de la bosse. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale du rail $\vec{N}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'anneau entre A et S, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\to S}(\vec{P}) + W_{A\to S}(\vec{N})$$

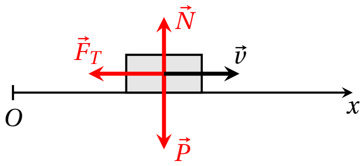
avec $v_A = v_0$, $W_{A\to S}(\vec{P}) = -mgH$ et $W_{A\to S}(\vec{N}) = 0$ car $\vec{N}$ est orthogonale au mouvement à tout instant. On en déduit l'expression de la vitesse en S : $v_S = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$. Cette vitesse n'est définie qu'à condition que le terme sous la racine soit positif. On en déduit que la masse franchit le sommet de la bosse à condition que : $\boxed{v_0 > v_{0,\min} = \sqrt{2gH}}$.

On suppose que l'anneau franchit la bosse et on applique à nouveau le théorème de l'énergie cinétique, cette fois-ci entre A et B. Le travail du poids vaut $W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(h-H)$.

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h-H) \iff \boxed{v_B = \sqrt{v_0 - 2g(H-h)}}$$

Application 2

1. La voiture est soumise à l'action mécanique motrice de puissance $\mathscr{P}$, à la force de frottement de l'air $\vec{F}_T$, à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale de la route $\vec{N}$. On applique le théorème de la puissance mécanique à la voiture dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P} + \mathscr{P}(\vec{F}_T) + \mathscr{P}(\vec{P}) + \mathscr{P}(\vec{N})$.



Les puissances du poids et de la réaction normale sont nulles car ces deux forces sont orthogonales au mouvement à tout instant. On calcule la puissance de la force de frottement : $\mathscr{P}(\vec{F}_T) = \vec{F}_T \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}\rho_0 SC_x v^3$ et on écrit la dérivée de l'énergie cinétique en termes de vitesse : $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$:

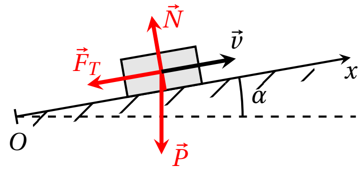
$$\boxed{mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P} - \frac{1}{2}\rho_0 SC_x v^3}$$

2. Dans le régime permanent de vitesse constante on a $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. On résout l'équation sans dérivée :

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\rho_0 SC_x v_{\max}^3 \iff \boxed{v_{\max} = \left(\frac{2\mathscr{P}}{\rho_0 SC_x}\right)^{1/3} = 181\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

3. Le moteur développe une puissance constante donc l'énergie totale consommée par le moteur pendant la durée T d'un trajet de longueur $L = 100\,\mathrm{km}$ vaut : $\mathscr{E} = \mathscr{P}T$. Le voyage se déroule à vitesse V constante donc $T = L/V$. Par ailleurs on a montré à la question précédente qu'en régime permanent $\mathscr{P} = \mathrm{Cste}V^3$. On en déduit que l'énergie dépensée sur un trajet de longueur L fixée vaut : $\mathscr{E} = \mathrm{Cste} \times L \times V^2$. La consommation de carburant est elle-même proportionnelle à $\mathscr{E}$ donc on conclut que $\boxed{x = 2}$.

4. On reprend le théorème de la puissance cinétique. Cette fois-ci le poids n'est pas orthogonal au déplacement (tandis que la réaction normale l'est toujours) donc il faut tenir compte de sa puissance. On la calcule : $\mathscr{P}(\vec{P}) = m\vec{g}\cdot\vec{v} = -mgv\sin\alpha$. Les autres termes sont inchangés. L'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ devient : $\boxed{mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P} - \frac{1}{2}\rho_0 SC_x v^3 - mg\sin(\alpha)v}$.



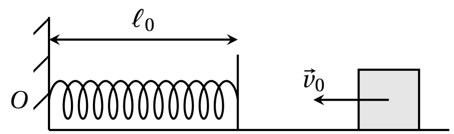
En régime permanent de mouvement rectiligne et uniforme la vitesse $v_{\max}$ est solution de l'équation polynomiale de degré 3 : $\frac{1}{2}\rho_0 SC_x v_{\max}^3 + mg\sin(\alpha)v_{\max} - \mathscr{P} = 0$. Une résolution numérique à la calculatrice donne : $\boxed{v_{\max} = 149\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$.

Application 3

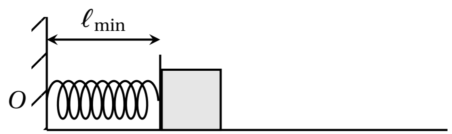
1. Dans le repère sphérique la longueur du ressort s'identifie à r et la force de rappel s'écrit : $\boxed{\vec{F} = -k(r-\ell_0)\vec{u}_r}$.

2. On projette l'équation $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p$ sur $\vec{u}_r$: $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = k(r-\ell_0)$. On intègre cette équation en choisissant la constante d'intégration de sorte que l'énergie potentielle est nulle quand $r = \ell_0$. L'énergie potentielle élastique s'écrit : $\boxed{E_p(r) = \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2}$.

Application 4



Situation initiale



Ressort à sa longueur minimale

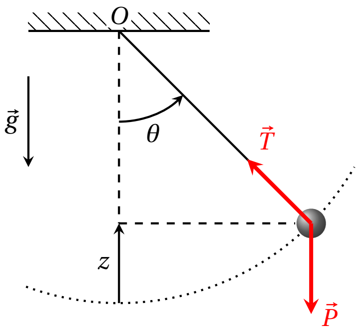
Une fois que la masse est en contact avec le ressort elle est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale du support $\vec{N}$ et à la force de rappel du ressort $\vec{F}$. Seule la réaction normale est non conservative or elle ne travaille pas car elle est orthogonale au mouvement à tout instant. On conclut que l'énergie mécanique de la masse se conserve au cours du mouvement. On écrit l'énergie mécanique de la masse dans l'état initial (vitesse v_0, ressort de longueur ℓ_0) puis dans l'état de longueur minimale du ressort (vitesse nulle, longueur $\ell_{\min}$).

TD10 : Énergétique - corrigé

On ne tient pas compte du poids car le mouvement est horizontal. On écrit l'énergie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k(\ell_{\min}-\ell_0)^2 \iff \boxed{\ell_{\min} = \ell_0 - \sqrt{\frac{k}{m}}v_0}$$

Application 5



1. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = mgz$ avec z l'altitude de la masse mesurée depuis la position $\theta = 0$ (voir schéma ci-contre). Cette altitude vaut $z = \ell - \ell\cos\theta$ donc : $\boxed{E_p(\theta) = mg\ell(1-\cos\theta)}$.

2. La masse est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension du fil $\vec{T}$. Le poids est conservatif et la tension ne travaille pas car elle est orthogonale au mouvement à tout instant donc l'énergie mécanique se conserve.

Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ donc l'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$ et l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$. On applique le théorème de la puissance mécanique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = m\ell^2\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta\right) = 0$$

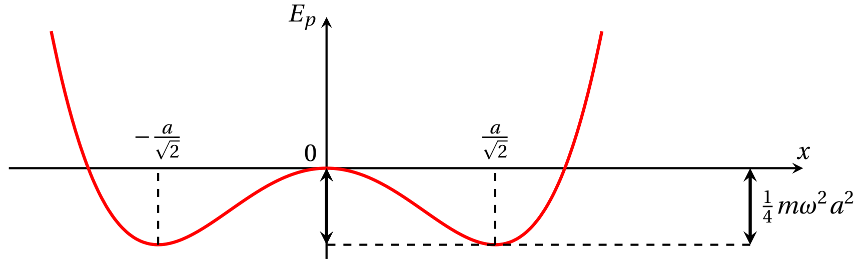
Si la masse est en mouvement ($\dot{\theta} \neq 0$) alors la position angulaire est solution de l'équation : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$. On retrouve l'équation du mouvement déjà obtenue avec le PFD.

Application 6

1. On dérive l'énergie potentielle : $E_p'(x) = m\omega^2\left(\frac{4x^3}{a^2} - 2x\right) = 2m\omega^2\left(2\frac{x^2}{a^2} - 1\right)x$. On dresse son tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{a}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{a}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$E_p'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
E_p		$\searrow$	$-\frac{1}{4}m\omega^2a^2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}m\omega^2a^2$	$\nearrow$	

L'énergie potentielle est minimale en $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ et maximale en $x = 0$. On trace l'allure de son graphe (voir page suivante). Les positions $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ sont de **positions d'équilibre stables**. La position $x = 0$ est une **position d'équilibre instable**.



2. On calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle en $x_{\text{eq}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$E_p''(x) = 2m\omega^2\left(\frac{6x^2}{a^2} - 1\right) \implies E_p''(x_{\text{eq}}) = 4m\omega^2$$

On écrit le développement de Taylor à l'ordre deux au voisinage de x_{eq} :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{\text{eq}}) + \frac{E_p''(x_{\text{eq}})}{2}(x-x_{\text{eq}})^2 = -\frac{1}{4}m\omega^2a^2 + 2m\omega^2(x-x_{\text{eq}})^2$$

On calcule la force : $\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x \simeq -4m\omega^2(x-x_{\text{eq}})\vec{u}_x}$.

3. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = -4m\omega^2(x-x_{\text{eq}}) \iff \ddot{x} + 4\omega^2x = 4\omega^2x_{\text{eq}}$. On reconnaît l'équation d'un OH de pulsation propre $\omega_0 = 2\omega$ et de période propre $\boxed{T_0 = \pi/\omega}$.

4. Placée initialement dans l'une des positions d'équilibre stable, la masse doit avoir une énergie mécanique strictement positive pour franchir la barrière de potentiel en $x = 0$. Compte tenu des conditions initiales on peut écrire : $E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}m\omega^2a^2$. La condition sur la vitesse initiale v_0 est donc la suivante :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}m\omega^2a^2 > 0 \iff \boxed{v_0 > \frac{a\omega}{\sqrt{2}}}$$

⋆ Exercice 1 : Chute verticale avec frottements

1. On repère le mouvement avec un axe (Oz) ascendant. Dans ces conditions, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = mgz$ et, au cours de l'ascension, la force de frottement, opposée au déplacement, s'écrit $\vec{F} = -f\vec{u}_z$. On applique le TEC à la masse, en ascension entre le point A et le point B, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{F})$$

où :

- $\Delta E_c = E_c(\mathrm{B}) - E_c(\mathrm{A}) = -\frac{1}{2}mv_0^2$,
- $W(\vec{P}) = -mgh$ est le travail du poids (négatif car la masse monte),
- $W(\vec{F}) = -fh$ est le travail de la force de frottement (négatif car la force de frottement est résistante).

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh - fh \iff \boxed{h = \frac{mv_0^2}{2(mg+f)} = 4,1\,\mathrm{m}}$$

2. On applique à nouveau le TEC à la masse, en chute entre le point B et le point A, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Au cours de la chute, la force de frottement, toujours opposée au déplacement, s'écrit $\vec{F} = f\vec{u}_z$.

- $\Delta E_c = E_c(\mathrm{A}) - E_c(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}'^2$,
- $W(\vec{P}) = mgh$ (positif car la masse tombe),
- $W(\vec{F}) = -fh$ (négatif car la force de frottement est toujours résistante).

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}'^2 = mgh - fh \iff \boxed{v_{\mathrm{A}}' = \sqrt{\frac{2(mg-f)h}{m}} = \sqrt{\frac{mg-f}{mg+f}}v_0 = 7,7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

★ Exercice 2 : Champ gravitationnel terrestre

1. On cherche une énergie potentielle $E_p(z)$ qui vérifie :

$$\vec{F}_g = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}E_p \iff \frac{GmM_T}{(R_T+z)^2} = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}$$

On intègre cette équation différentielle :

$$E_p(z) = -\frac{GmM_T}{R_T+z} + \mathrm{Cste}$$

Enfin, puisque l'origine de l'énergie potentielle est prise à l'infini, la constante d'intégration est nulle :

$$\boxed{E_p(z) = -\frac{GmM_T}{R_T+z}}$$

2. a) On applique le TEC à la masse, entre le sol ($z=0$, vitesse v_0) et le sommet de la trajectoire ($z = z_{\max}$, vitesse nulle) : $\Delta E_c = W(\vec{F})$, où :

- $\Delta E_c = -\frac{1}{2}mv_0^2$,
- $W(\vec{F}) = -\Delta E_p = E_p(z=0) - E_p(z=z_{\max}) = GmM_T\left(\frac{1}{R_T+z_{\max}} - \frac{1}{R_T}\right)$

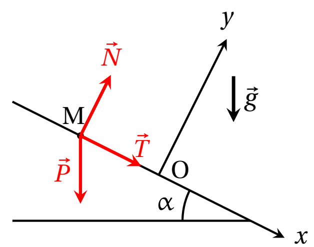
$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = GmM_T\left(\frac{1}{R_T+z_{\max}} - \frac{1}{R_T}\right) \iff \boxed{r_{\max} = R_T + z_{\max} = \left(\frac{1}{R_T} - \frac{v_0^2}{2GM}\right)^{-1}}$$

2. b) Le résultat de la question précédente n'est défini que pour $R_T + z_{\max} > 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{v_0 < v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$$

En conclusion, l'objet s'arrête (et donc retombe ensuite sur le sol) uniquement si $v_0 < v_2$. La vitesse v_2, appelée **deuxième vitesse cosmique**, est la vitesse limite à partir de laquelle un objet lancé depuis la surface du sol (en négligeant tout frottement), ne retombe pas sur le sol mais s'éloigne à l'infini, s'échappant ainsi du champ gravitationnel terrestre.

★ Exercice 3 : Solide sur un plan incliné



1. La réaction du support a une composante normale et une composante tangentielle : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. Pour obtenir des informations sur ces composantes, on applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

On projette le PFD dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha + T & (1) \\ 0 = -mg\cos\alpha + N & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) permet de déterminer la réaction normale : $N = mg\cos\alpha$. On détermine T en utilisant la deuxième loi de Coulomb (la masse glisse sur le plan incliné) :

$$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| \iff T = fmg\cos\alpha$$

La réaction du support s'écrit donc : $\boxed{\vec{R} = mg\cos\alpha(f\vec{u}_x + \vec{u}_y)}$.

2. On applique le TEC à la masse, entre le point O ($x=0$, $v=V_0$) et le sommet de la trajectoire (noté P, $x=-\frac{H_m}{\sin\alpha}$, vitesse nulle) :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

avec :

- $\Delta E_c = E_c(\mathrm{P}) - E_c(\mathrm{O}) = -\frac{1}{2}mV_0^2$,
- $W(\vec{P}) = -mgH_m$,
- $W(\vec{R}) = \underbrace{W(\vec{N})}_{=0} + W(\vec{T}) = -\|\vec{T}\| \times OP = -fmg\cos\alpha \times \frac{H_m}{\sin\alpha} = -fmgH_m \mathrm{cotan}\alpha$.

$$-\frac{1}{2}mV_0^2 = -mgH_m - fmgH_m\mathrm{cotan}\alpha \iff \boxed{H_m = \frac{V_0^2}{2g(1+f\mathrm{cotan}\alpha)}}$$

3. D'après la question précédente : $\boxed{\Delta E_c = -\frac{mV_0^2}{2}}$.

La variation d'énergie potentielle de pesanteur s'écrit : $\boxed{\Delta E_p = mgH_m = \frac{1}{1+f\mathrm{cotan}\alpha}\cdot\frac{mV_0^2}{2}}$.

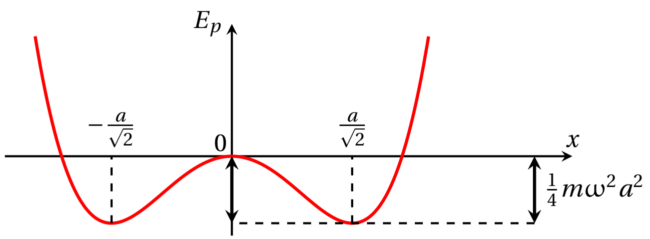
La variation d'énergie mécanique s'écrit : $\boxed{\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = \frac{-f\mathrm{cotan}\alpha}{1+f\mathrm{cotan}\alpha}\cdot\frac{mV_0^2}{2}}$.

⋆ Exercice 4 : Barrière de potentiel

1. On étudie les variations de $E_p(x)$:

$$E_p'(x) = m\omega^2\left(\frac{4x^3}{a^2} - 2x\right) = 2m\omega^2\left(2\frac{x^2}{a^2} - 1\right)x$$

L'énergie potentielle est minimale en $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ et maximale en $x=0$. On trace l'allure de son graphe :



Les positions $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ sont de **positions d'équilibre stables**. La position $x=0$ est une **position d'équilibre instable**.

On détermine la dérivée seconde de l'énergie potentielle dans l'une des position d'équilibre stable : $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}) = 4m\omega^2$. On en déduit l'expression de la pulsation des petites oscillations harmoniques autour de ces positions d'équilibre : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{\pm\frac{a}{\sqrt{2}}}} = 2\omega}$.

2. Par définition de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}E_p \iff F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -m\omega^2\left(\frac{4x^3}{a^2} - 2x\right)$$

On simplifie cette expression sous la forme suivante :

$$\boxed{F(x) = -\frac{4m\omega^2}{a^2}x\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}$$

<u>Rq</u> : On reconnaît à cette expression les trois positions d'équilibre (celles pour lesquelles $F(x)=0$).

3. On choisit arbitrairement la position d'équilibre $x_s = \frac{a}{\sqrt{2}}$. On exprime la force en fonction de ε :

$$F(\varepsilon) = -\frac{4m\omega^2}{a^2}\left(\varepsilon + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)(\varepsilon + \sqrt{2}a)\varepsilon$$

On développe au premier ordre autour de $\varepsilon = 0$:

$$F(\varepsilon) \simeq -\frac{4m\omega^2}{a^2} \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}a \times \varepsilon = -4m\omega^2\varepsilon$$

On applique ensuite le PFD au mobile, supposé soumis uniquement à la force F :

$$m\ddot{x} = F$$

Sachant que $\ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$, on aboutit à :

$$m\ddot{\varepsilon} = -4m\omega^2\varepsilon \iff \boxed{\ddot{\varepsilon} + 4\omega^2\varepsilon = 0}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un OH de pulsation propre :

$$\boxed{\omega_0 = 2\omega}$$

Le résultat est cohérent avec celuide la question 1.

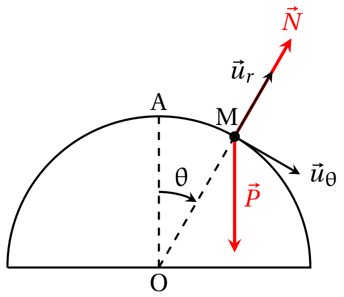
4. Placée initialement dans l'une des positions d'équilibre stable, la masse doit avoir une énergie mécanique suffisante pour ne pas être piégée dans un puits de potentiel. Pour cela, il faut que :

$$E > 0 \iff \frac{1}{2}mv_0^2 + E_p(x = x_s) > 0$$

En exprimant l'énergie potentielle, on obtient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}m\omega^2a^2 > 0 \iff \boxed{v_0 > \frac{a\omega}{\sqrt{2}}}$$

★★ Exercice 5 : Point glissant sans frottement sur un cercle



1. On applique le TEC entre le point de départ A (sommet du cercle, $\theta = 0$, vitesse nulle) et le point M (θ, v). La réaction du support est normale car il n'y a pas de frottement.

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{N})$$

On rappelle qu'en coordonnées polaires, pour un mouvement circulaire, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies v^2 = R^2\dot{\theta}^2$. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit ici (en prenant comme origine des potentiels la position $\theta = 0$) : $E_p(\theta) = mgR(\cos\theta - 1)$.

- $\Delta E_c = E_c(\mathrm{M}) - E_c(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$,
- $W(\vec{P}) = mgh = mgR(1-\cos\theta)$,
- $W(\vec{N}) = 0 \quad$ car $\vec{N} \perp \vec{v}$.

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = mgR(1-\cos\theta) \iff \boxed{mR\dot{\theta}^2 = 2mg(1-\cos\theta)}$$

2. On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté dans la base polaire :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = \|\vec{N}\| - mg\cos\theta & \text{sur } \vec{u}_r \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta & \text{sur } \vec{u}_\theta \end{cases}$$

La projection sur $\vec{u}_r$ permet de déterminer la réaction du support : $\|\vec{N}\| = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$. En utilisant le résultat de la question précédente, on peut exprimer $\|\vec{N}\|$ uniquement en fonction de la variable θ :

$$\boxed{\|\vec{N}\| = mg(3\cos\theta - 2)}$$

3. La masse quitte le cercle à partir du moment où la réaction du support s'annule, c'est-à-dire pour l'angle θ tel que : $\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}}$.

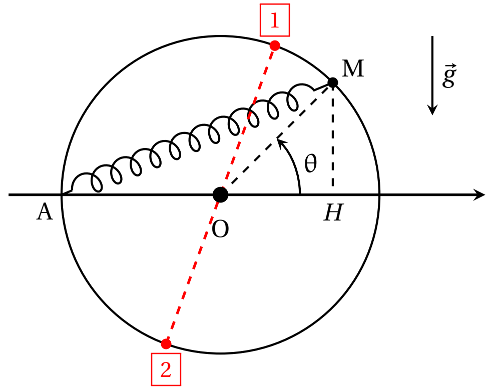
★★ Exercice 6 : Équilibre sur un cercle

1. En prenant comme origine des potentiels la position $\theta = 0$, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_{\mathrm{p,pes}} = mgR\sin\theta$. L'énergie potentielle élastique vaut : $E_{\mathrm{p,el}} = \frac{1}{2}k\mathrm{AM}^2$. On détermine AM en utilisant le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HM}^2 = (R + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 = 2R^2(1+\cos\theta)$$

L'énergie potentielle totale de la masse s'écrit :

$$\boxed{E_p = mgR\sin\theta + kR^2(1+\cos\theta)}$$



2. On étudie les variations de $E_p(\theta)$: $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = mgR\cos\theta - kR^2\sin\theta$. Les positions d'équilibre correspondent aux positions qui vérifient :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0 \iff \boxed{\tan\theta = \frac{mg}{kR}}$$

Cette équation a deux solutions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Elles sont représentées sur le schéma ci-dessus.

3. La position d'équilibre 1 est elle que $\cos\theta_1 > 0$ et $\sin\theta_1 > 0$. La position d'équilibre 2 est elle que $\cos\theta_2 < 0$ et $\sin\theta_2 < 0$. Pour déterminer la stabilité de ces positions d'équilibre, on détermine la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = -mgR\sin\theta - kR^2\cos\theta$$

Compte tenu des signes de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ évoqués plus haut, $\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_1} < 0$ et $\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_2} > 0$. **La position d'équilibre 1 est instable et la position d'équilibre 2 est stable.**

Comme vu en cours, la pulsation propre des petites oscilations autour de la position d'équilibre stable θ_2 vérifie :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{mR^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_2} = -\frac{g}{R}\sin\theta_2 - \frac{k}{m}\cos\theta_2$$

Pour déterminer $\cos\theta_2$ et $\sin\theta_2$, on utilise :

$$\begin{cases} mgR\cos\theta_2 = kR^2\sin\theta_2 \\ \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1 \end{cases}$$

Après calculs, on montre que :

$$\cos\theta_2 = -\frac{kR}{\sqrt{(mg)^2+(kR)^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta_2 = -\frac{mg}{\sqrt{(mg)^2+(kR)^2}}$$

En injectant ces expressions dans celle de ω_0, on obtient :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R}\cdot\frac{mg}{\sqrt{(mg)^2+(kR)^2}} + \frac{k}{m}\cdot\frac{kR}{\sqrt{(mg)^2+(kR)^2}} = \frac{1}{mR}\cdot\frac{(mg)^2+(kR)^2}{\sqrt{(mg)^2+(kR)^2}} = \frac{1}{mR}\sqrt{(mg)^2+(kR)^2} = \sqrt{\left(\frac{g}{R}\right)^2+\left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

En passant à la racine, on trouve :

$$\boxed{\omega_0 = \left(\left(\frac{g}{R}\right)^2+\left(\frac{k}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}$$

★★ Exercice 7 : Mouvement rectiligne d'un véhicule à moteur

1. On applique le TPC au véhicule dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le véhicule est soumis à son poids, à la réaction du sol (normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$) et à la force de frottement de l'air.

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\vec{P}) + \mathscr{P}(\vec{N}) + \mathscr{P}(\vec{T}) + \mathscr{P}(\vec{F})$$

avec :

- $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ car $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v}$,
- $\mathscr{P}(\vec{P}) = \mathscr{P}(\vec{N}) = 0$ car ces deux forces sont orthogonales au mouvement,
- $\mathscr{P}(\vec{T}) = \mathscr{P} = \text{Cste}$ d'après l'énoncé,
- $\mathscr{P}(\vec{F}) = -\beta m v\vec{v}\cdot\vec{v} = -\beta m v^3$.

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathscr{P} - \beta m v^3 \iff \boxed{\frac{mv^2}{\mathscr{P}-\beta m v^3}\mathrm{d}v = \mathrm{d}x}$$

2. On intègre cette équation différentielle entre le point de départ ($x = 0$, $v = 0$) et un point quelconque (x, v) :

$$\int_0^v \frac{mv'^2}{\mathscr{P}-\beta m v'^3}\mathrm{d}v' = \int_0^x \mathrm{d}x' \iff \left[-\frac{1}{3\beta}\ln\left(\mathscr{P}-\beta m v'^3\right)\right]_0^v = \boxed{\frac{1}{3\beta}\ln\left(\frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}-\beta m v^3}\right) = x(v)}$$

3. On inverse la relation obtenue à la question précédente pour déterminer la vitesse $v(x)$:

$$\frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}-\beta m v^3} = \mathrm{e}^{3\beta x} \iff v(x) = \left[\frac{\mathscr{P}}{\beta m}\left(1-\mathrm{e}^{-3\beta x}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

Quand $x \longrightarrow \infty$, la vitesse tend vers une valeur limite $\boxed{v_\ell = \left(\frac{\mathscr{P}}{\beta m}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

4. Le coefficient β vaut $\boxed{\beta = \frac{\mathscr{P}}{mv^3} = 1{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}}$.

D'après l'expression de $v(x)$ obtenue à la question précédente, la vitesse vaut $v_\ell/2$ lorsque :

$$1-\mathrm{e}^{-3\beta x} = \frac{1}{8} \iff \boxed{x = -\frac{1}{3\beta}\ln\left(\frac{7}{8}\right) = 43\,\mathrm{m}}$$

★★ Exercice 8 : Looping

La méthode employée est similaire à celle des exercices 5 et 8. On détermine une relation entre $\dot\theta^2$ et θ en utilisant la conservation de l'énergie mécanique, puisqu'on néglige les frottements.

$$E(\mathrm{M}) = E(\mathrm{A}) \iff \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 + mga(1-\cos\theta) = mgH \iff \boxed{ma\dot\theta^2 = 2mg\left(\cos\theta - 1 + \frac{H}{a}\right)}$$

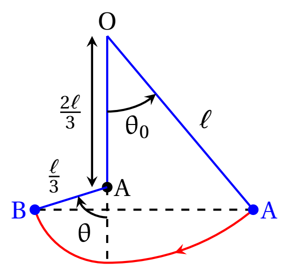
Pour déterminer la réaction N du support, on applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur $\overrightarrow{u_r}$:

$$-ma\dot\theta^2 = mg\cos\theta - N \iff N = mg\cos\theta + ma\dot\theta^2 = mg\left(3\cos\theta - 2 + \frac{2H}{a}\right)$$

La masse effectue un tour complet sans quitter la gouttière à condition que N ne s'annule jamais, c'est-à-dire que :

$$\frac{2H}{a} - 2 > 3 \iff \boxed{H > H_{\min} = \frac{5a}{2}}$$

★★ Exercice 9 : Pendule butant contre un clou



1. En l'absence de frottement, l'énergie mécanique du pendule se conserve. Comme en A et B, l'énergie cinétique est identique (elle est nulle) et l'énergie mécanique aussi, alors il en va de même pour l'énergie potentielle de pesanteur. Par conséquent, **A et B sont à la même altitude**. Mathématiquement, cela se traduit par la relation :

$$\frac{2\ell}{3} + \frac{\ell}{3}\cos\theta = \ell\cos\theta_0 \iff \boxed{\cos\theta = 3\cos\theta_0 - 2}$$

L'application numérique donne $\boxed{\theta = -35°}$.

2. On va déterminer l'expression de la tension T du fil, en fonction de la seule variable θ. Pour cela, on emploie la même méthode que pour le calcul de la réaction normale dans l'exercice 5. Dans un premier temps, on établit une relation entre $\dot\theta^2$ et θ à l'aide d'un bilan énergétique, en l'occurence en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.
Soit M un point quelconque sur la trajectoire du pendule. En prenant pour origine la position $\theta = 0$, l'énergie potentielle de pesanteur du pendule dans le domaine $\theta < 0$ (longueur du fil égale à $\frac{\ell}{3}$) s'écrit : $E_p = mg\frac{\ell}{3}(1-\cos\theta)$. Au point de départ, $E_p = mg\ell$.

$$E(\mathrm{M}) = E(\mathrm{A}) \iff \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\dot\theta^2 + mg\frac{\ell}{3}(1-\cos\theta) = mg\ell \iff \boxed{m\ell\dot\theta^2 = 6mg(2+\cos\theta)}$$

On applique le PFD au pendule, dans le domaine $\theta < 0$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur $\vec{u}_r$:

$$-m\frac{\ell}{3}\dot\theta^2 = mg\cos\theta - T \iff T = mg\cos\theta + m\frac{\ell}{3}\dot\theta^2 = mg(4+3\cos\theta)$$

On constate que la tension du fil $T(\theta)$ ne s'annule jamais, quelle que soit la valeur de θ. Par conséquent, **le fil ne se détend jamais et s'enroule autour du clou**.