Corrigé DS3

Exercice 1 : Modèle de liaison interatomique

1. La position d'équilibre est solution de $E_p'(x_{\text{eq}})=0$:

$$2V_0 a \mathrm{e}^{-a(x_{\text{eq}}-x_0)}\left[1-\mathrm{e}^{-a(x_{\text{eq}}-x_0)}\right]=0 \iff \boxed{x_{\text{eq}}=x_0}$$

2. On calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

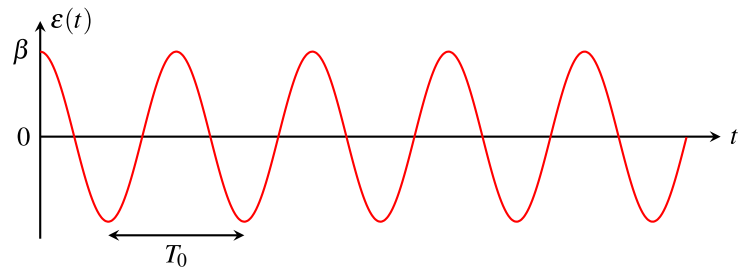
$$E_p''(x)=2V_0a^2\left[2\mathrm{e}^{-2a(x-x_0)}-\mathrm{e}^{-a(x-x_0)}\right] \implies E_p''(x_0)=2V_0a^2$$

On écrit le développement à l'ordre 2 de l'énergie potentielle : $E_p(x)\simeq V_0a^2(x-x_{\text{eq}})^2$. On calcule la force d'interaction résultante :

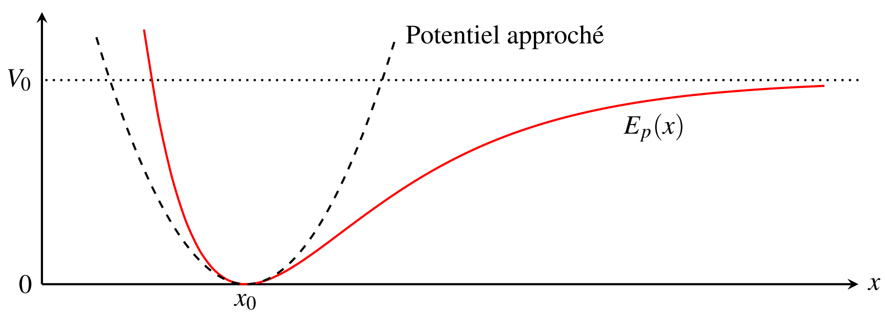
$$\vec{F}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p=-E_p'(x)\vec{u}_x\simeq -2V_0a^2(x-x_{\text{eq}})\vec{u}_x=-2V_0a^2\varepsilon\vec{u}_x$$

Cette expression est semblable à celle d'un ressort de raideur $\boxed{k=2V_0a^2}$.

3. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, projeté sur $\vec{u}_x$: $m\ddot{\varepsilon}=-k\varepsilon \iff \ddot{\varepsilon}+\frac{k}{m}\varepsilon=0$. La pulsation des oscillations est : $\boxed{\omega_0=\sqrt{k/m}=a\sqrt{2V_0/m}}$. La solution générale de l'équation est $x(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t)$. On calcule A et B avec les deux conditions initiales et on trouve : $\boxed{x(t)=\beta\cos(\omega_0t)}$. On représente ci-dessous le graphe de $\varepsilon(t)$.



4. On trace l'allure de $E_p(x)$ ainsi que du potentiel parabolique approché.



Exercice 2 : Balle lancée sur un plan incliné

1. $\boxed{\vec{P}=mg(-\sin\alpha\vec{u}_x-\cos\alpha\vec{u}_y)}$

2. $\boxed{\vec{V}_0=V_0(\cos\beta\vec{u}_x+\sin\beta\vec{u}_y)}$

3. On applique le PFD à la balle dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a}=\vec{P}$ car il s'agit d'un mouvement de chute libre. On projette le PFD dans la base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y)$:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-mg\sin\alpha \\ m\ddot{y}=-mg\cos\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{\ddot{x}=-g\sin\alpha} \\ \boxed{\ddot{y}=-g\cos\alpha} \end{cases}$$

4. Les conditions initiales sur la vitesse sont $\dot{x}(0)=V_0\cos\beta$ et $\dot{y}(0)=V_0\sin\beta$. On en déduit, par intégration, l'expression de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=-gt\sin\alpha+V_0\cos\beta \\ \dot{y}(t)=-gt\cos\alpha+V_0\sin\beta \end{cases}$$

Les conditions initiales sur la position sont $x(0)=0$ et $y(0)=0$. On en déduit, par une nouvelle intégration, l'expression de $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t)=(-\frac{1}{2}g\sin\alpha)t^2+(V_0\cos\beta)t \\ y(t)=(-\frac{1}{2}g\cos\alpha)t^2+(V_0\sin\beta)t \end{cases}$$

On obtient le résultat attendu, avec $\boxed{A=-\dfrac{g}{2}}$ et $\boxed{B=V_0}$.

5. La balle rebondit sur le plan incliné lorsque $y=0$, c'est-à-dire à la date t telle que :

$$\frac{1}{2}g\cos\alpha t^2=V_0\sin\beta t \iff t=\frac{2V_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

À cette date-là, les coordonnées de la balle sont les suivantes :

$$\boxed{x_{\text{C}}=\frac{2V_0^2\sin\beta}{g\cos^2\alpha}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\frac{2V_0^2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\alpha}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_{\text{C}}=0}$$

6. À la date $t=\frac{2V_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$:

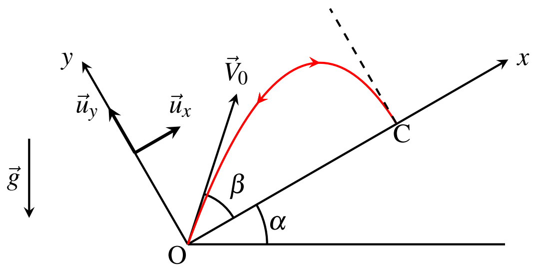
$$\boxed{v_{\text{C}x}=\dot{x}_{\text{C}}=V_0\cos\beta(1-2\tan\beta\tan\alpha)} \quad \text{et} \quad \boxed{v_{\text{C}y}=\dot{y}_{\text{C}}=-V_0\sin\beta}$$

7. Juste après le rebond, le vecteur vitesse vaut $\vec{v}_{\text{C}}'=v_{\text{C}x}\vec{u}_x-v_{\text{C}y}\vec{u}_y$. L'angle β' vérifie :

$$\begin{cases} \boxed{v_{\text{C}x}'=v_{\text{C}x}=v_{\text{C}}'\cos\beta'} \\ \boxed{v_{\text{C}y}'=-v_{\text{C}y}=v_{\text{C}}'\sin\beta'} \end{cases} \iff \boxed{\tan\beta'=-\frac{v_{\text{C}y}}{v_{\text{C}x}}=\frac{\tan\beta}{1-2\tan\beta\tan\alpha}}$$

8. $\beta'=\frac{\pi}{2} \iff v_{\text{C}x}=0 \iff 1-2\tan\alpha\tan\beta=0 \iff \boxed{\tan\beta=\dfrac{1}{2}\text{cotan}\alpha}$.

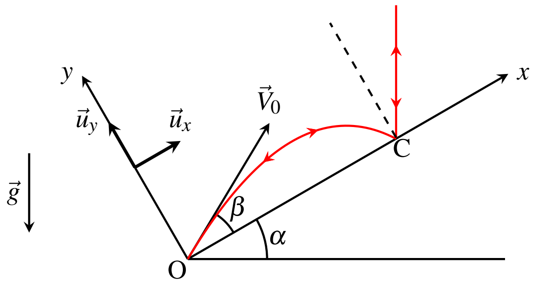
AN : $\boxed{\beta=41°}$.



Dans ce cas de figure, la balle rebondit perpendiculairement au plan incliné, puis elle suit la même trajectoire qu'avant le rebond, en sens inverse, avant de retomber exactement au point O.

9. $\beta' = \frac{\pi}{2} - \alpha \iff \text{cotan}\alpha = \frac{\tan\beta}{1-2\tan\beta\tan\alpha} \iff \text{cotan}\alpha - 2\tan\beta = \tan\beta \iff \boxed{\tan\beta = \frac{1}{3}\text{cotan}\alpha}$.

AN : $\boxed{\beta = 30^\circ}$.



Dans ce cas de figure, la balle rebondit à la verticale, elle retombe ensuite exactement en C, puis revient au point O par le même chemin qu'à l'aller.

Exercice 3 : Établissement du courant dans un circuit inductif

1. Dans la base polaire le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$. Dans le cas présent $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$ donc $\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\omega^2\right)\vec{u}_r + 2\dot{r}\omega\vec{u}_\theta}$.

2. Il est dit que l'anneau glisse sans frottement le long de la tige donc **la réaction de la tige est perpendiculaire à la tige**, c'est-à-dire perpendiculaire à $\vec{u}_r$. par conséquent la réaction possède *a priori* des composantes sur $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$.

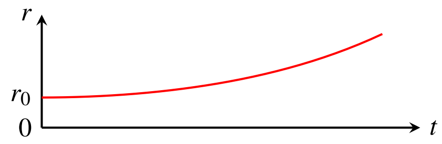
3. L'anneau est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et à la réaction de la tige $\vec{R} = R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{u}_z$. On applique le principe fondamental de la dynamique à l'anneau dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$. On projette sur $\vec{u}_r$:

$$\boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$$

4. Les deux conditions initiales sont $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$ (anneau initialement immobile par rapport à la tige). On montre alors que $A = B = \frac{r_0}{2}$ donc :

$$r(t) = \frac{r_0}{2}\left(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}\right) \implies \boxed{r(t) = r_0\text{ch}(\omega t)}$$

On trace l'allure du graphe :



5. L'anneau est éjecté de la tige lorsque :

$$r(t_1) = L \iff r_0\text{ch}(\omega t_1) = L \iff \boxed{t_1 = \frac{1}{\omega}\text{argch}\left(\frac{L}{r_0}\right) = 1{,}9\,\text{s}}$$

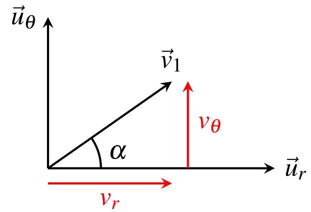
6. Au moment de l'éjection $r = L$ donc le vecteur vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 = \dot{r}(t_1)\vec{u}_r + L\omega\vec{u}_\theta &= r_0\omega\text{sh}(\omega t_1)\vec{u}_r + L\omega\vec{u}_\theta \\ &= r_0\omega\sqrt{\text{ch}^2(\omega t_1) - 1}\,\vec{u}_r + L\omega\vec{u}_\theta \\ &= \omega\sqrt{L^2 - r_0^2}\,\vec{u}_r + L\omega\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

On calcule la norme de ce vecteur :

$$v_1 = \sqrt{\omega^2(L^2 - r_0^2) + L^2\omega^2} \iff \boxed{v_1 = \omega\sqrt{2L^2 - r_0^2} = 0{,}84\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

7. On représente le vecteur vitesse au moment de l'éjection.



L'angle α est déterminé par :

$$\tan\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{L\omega}{\omega\sqrt{L^2 - r_0^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 - r_0^2}}$$

Si $L \gg r_0$ alors on peut écrire :

$$\tan\alpha \simeq \frac{L}{L} = 1 \implies \boxed{\alpha \simeq 45^\circ}$$