DS de physique n°3

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et ***les résultats soulignés ou encadrés****. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considére comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants.*

Exercice 1 : Modèle de liaison interatomique

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que dans la direction (Ox). En notant x la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit selon la relation de Morse :

$$E_p(x) = V_0 \left[1 - \mathrm{e}^{-a(x-x_0)}\right]^2$$

avec V_0, a et x_0 des constantes réelles positives.

1. Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée *longueur de liaison à l'équilibre* x_{eq}.

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre : $x = x_{\text{eq}} + \varepsilon$, avec $\left|\varepsilon\right| \ll x_{\text{eq}}$.

2. En développant l'énergie potentielle au second ordre en ε, montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur k dont on donnera l'expression en fonction de V_0 et a.

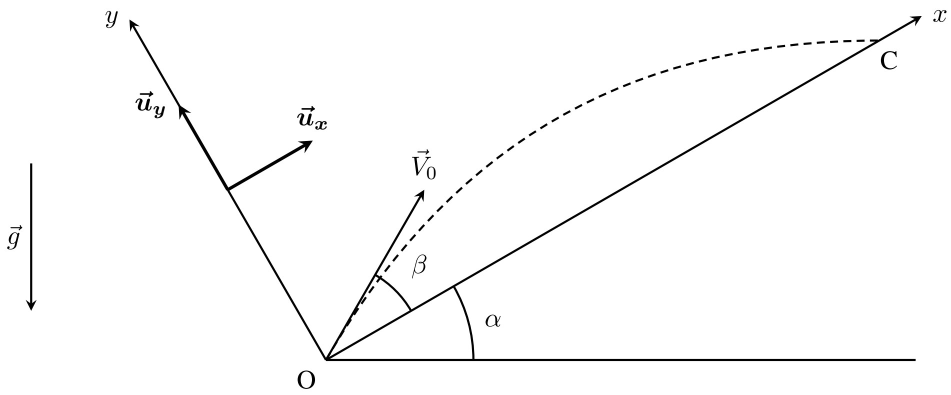
3. Si on appliquait cette force à une particule de masse m et de position $\varepsilon(t)$, quelle serait la pulsation des oscillations de celle-ci ? Calculer puis représenter la vibration au cours du temps $t \mapsto \varepsilon(t)$ pour des conditions initiales données : $\varepsilon(0) = \beta$ et $\dot{\varepsilon}(0) = 0$.

4. Donner l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

FORMULAIRE :

- Développement de Taylor à l'ordre deux : $f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0)$;
- Gradient 1D en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x$.

Exercice 2 : Balle lancée sur un plan incliné



On lance une balle, assimilée à un point matériel de masse m, avec une vitesse $\vec{V}_0$ faisant un angle β avec un plan, lui-même incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On repère le mouvement de chute de la balle dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (voir schéma ci-dessus). On néglige tout frottement. Pour les applications numériques, on prendra $\alpha = 30°$.

1. Projeter le poids dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, en fonction de α.

2. Projeter $\vec{V}_0$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, en fonction de β et $V_0 = \left\|\vec{V}_0\right\|$.

3. Déterminer les équations différentielles du deuxième ordre vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$.

4. Montrer que :

$$\begin{cases} x(t) = (A\sin\alpha)t^2 + (B\cos\beta)t \\ y\,(t) = (A\cos\alpha)t^2 + (B\sin\beta)t \end{cases}$$

où A et B sont des constantes à exprimer en fonction de V_0 et g.

5. Déterminer les coordonnées du point C où se produit le premier rebond de la balle sur le plan incliné.

6. Montrer que les coordonnées de la vitesse $\vec{v}_\mathrm{C}$ au point C sont les suivantes :

$$\begin{cases} v_{\mathrm{C}x} = V_0\cos\beta\,(1 - 2\tan\beta\tan\alpha) \\ v_{\mathrm{C}y} = -V_0\sin\beta \end{cases}$$

On suppose qu'en C, le rebond de la balle est élastique, ce qui signifie qu'à l'instant du rebond, la vitesse tangentielle au plan v_x se conserve mais que la vitesse normale au plan v_y change de signe. Autrement dit, immédiatement après le rebond, la vitesse vaut $\vec{v}'_\mathrm{C} = v_{\mathrm{C}x}\vec{u}_x - v_{\mathrm{C}y}\vec{u}_y$.

7. On note β' l'angle entre $\vec{v}'_\mathrm{C}$ et l'axe (Ox). Projeter $\vec{v}'_\mathrm{C}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, en fonction de $v'_\mathrm{C} = \left\|\vec{v}'_\mathrm{C}\right\|$ et β'. En déduire l'expression de $\tan\beta'$ en fonction de α et β.

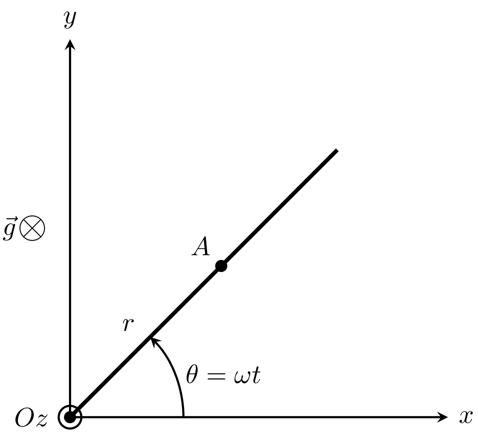
8. Quelle valeur faut-il donner à β pour que $\beta' = \dfrac{\pi}{2}$? Représenter graphiquement la situation. Décrire alors qualitativement le mouvement de la balle après le rebond.

9. Quelle valeur faut-il donner à β pour que $\beta' = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$? Représenter graphiquement la situation. Décrire alors qualitativement le mouvement de la balle après le rebond.

Exercice 3 : Mouvement d'un anneau sur une tige en rotation

Un anneau ponctuel A de masse m peut glisser sans frottement le long d'une tige rectiligne de longueur $L = 50\,\text{cm}$, en rotation à la vitesse angulaire constante $\omega = 1,2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ autour du point O, dans un plan horizontal (Oxy). On repère la position de l'anneau avec les coordonnées polaires $(r(t), \theta(t) = \omega t)$ représentées sur la figure ci-dessous. On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ le champ de pesanteur supposé uniforme.

À l'instant $t = 0$, la tige est confondue avec l'axe (Ox) et l'anneau est lâché sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance r_0 de l'origine O.



1. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$ de l'anneau dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en fonction de r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$ et ω.

2. Justifier que la réaction de la tige sur l'anneau s'écrit sous la forme : $\vec{R} = R_\theta \vec{u}_\theta + R_z \vec{u}_z$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par le rayon $r(t)$.

On admet la solution générale de cette équation différentielle : $r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$ avec A et B deux constantes d'intégration.

4. Donner l'expression de $r(t)$ compte tenu des conditions initiales. Tracer l'allure de son graphe.

5. Déterminer littéralement et numériquement la date t_1 à laquelle l'anneau est éjecté de la tige.

6. Déterminer littéralement et numériquement la vitesse v_1 de l'anneau lorsqu'il est éjecté.

7. Montrer que si $L \gg r_0$ alors à l'instant t_1 le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ de l'anneau fait un angle $\alpha \simeq 45°$ avec la tige.

FORMULAIRE :

- Cosinus hyperbolique : $x \mapsto \text{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$;
- Sinus hyperbolique : $x \mapsto \text{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$;
- Tangente hyperbolique : $x \mapsto \text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$;
- Dérivées : $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$ et $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$.