Correction du DNS 10

EXERCICE 3

1) Sur $]-1,1[$ l'équation est équivalente à $(E)\ :\ y' - \dfrac{x}{1-x^2}\,y = \dfrac{x}{1-x^2}$.

Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{x}{1-x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)$, donc les solutions de l'équation homogène $y' - \dfrac{x}{1-x^2}\,y = 0$ sont les fonctions $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définies par $y(x) = \lambda e^{-\ln(1-x^2)/2} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$ où λ est un réel.

On voit que la fonction $y : x \mapsto -1$ est solution de (E), donc les solutions de (E) sont les fonctions $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = -1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

où λ est un réel.

2) Sur $]-1,1[$ l'équation est équivalente à $(E)\ :\ y' - \dfrac{x}{1-x^2}\,y = \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}$.

Pour déterminer une solution particulière de (E) on applique la méthode de variation de la constante. Posons $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et posons $y = z\psi$ où z est une fonction dérivable sur $]-1,1[$. Alors y est dérivable et $y' = z'\psi + z\psi'$, donc pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
y'(x) - \frac{x}{1-x^2}\,y(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2} &\Leftrightarrow z'(x)\psi(x) + z(x)\psi'(x) - \frac{x}{1-x^2}z(x)\psi(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow z'(x)\psi(x) + z(x)\left(\psi'(x) - \frac{x}{1-x^2}\psi(x)\right) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow z'(x)\psi(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow z'(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

On peut prendre $z(x) = \dfrac{\operatorname{Arcsin}^2 x}{2}$. La fonction $y : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arcsin}^2 x}{2\sqrt{1-x^2}}$ est donc une solution particulière de (E).

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = \frac{\operatorname{Arcsin}^2 x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

où λ est un réel.

3) Posons $y(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. La fonction y est dérivable sur $]-1,1[$ et $y'(x) = 2ax + b$ pour tout $x \in]-1,1[$, donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[, (1-x^2)y'(x) - xy(x) = x^3 &\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[, (1-x^2)(2ax+b) - x(ax^2+bx+c) = x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[, -3ax^3 - 2bx^2 + (2a-c)x + b = x^3\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 1\\ -2b = 0\\ 2a - c = 0\\ b = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/3\\ b = 0\\ c = -2/3 \end{cases}.
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3}$ est donc une solution particulière de (E), et les solutions de (E) sont les fonctions $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définies par

$$y(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

où λ est un réel.

EXERCICE 2

1) L'équation (E_1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre qui est équivalente à

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1+x}{x^3}.$$

La solution générale de l'équation homogène associée est définie sur I par

$$y(x) = \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante : on pose $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$ et on pose $y = z\psi$ où z est une fonction dérivable sur I. Alors $y' = z'\psi + z\psi'$ et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{1+x}{x^3} &\Leftrightarrow z'(x)\psi(x) + z(x)\psi'(x) + \frac{1}{x}z(x)\psi(x) = \frac{1+x}{x^3} \\
&\Leftrightarrow z'(x)\psi(x) + \left(\psi'(x) + \frac{1}{x}\psi(x)\right)z(x) = \frac{1+x}{x^3} \\
&\Leftrightarrow z'(x)\psi(x) = \frac{1+x}{x^3} \\
&\Leftrightarrow z'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

On peut prendre $z(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln x$ et on en déduit que la fonction définie par $y(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x}$ est une solution particulière de (E_1).

La solution générale de (E_1) est donc définie sur I par

$$y(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} + \frac{\lambda}{x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $y_0(x) = x^a$ pour tout $x \in I$. Alors y_0 est deux fois dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $y_0'(x) = ax^{a-1}$ et $y_0''(x) = a(a-1)x^{a-2}$, donc pour tout $x \in I$:

$$x^2y_0''(x) - xy_0'(x) + y_0(x) = 0 \Leftrightarrow a(a-1)x^a - ax^a + x^a = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

La fonction $y_0 : x \mapsto x$ est donc une solution de (H) sur I.

2) a) La fonction y est deux fois dérivable sur I, $y' = z'y_0 + zy_0'$ et $y'' = z''y_0 + 2z'y_0' + zy_0''$, donc pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 1 + x &\Leftrightarrow x^2(z''(x)y_0(x) + 2z'(x)y_0'(x) + z(x)y_0''(x)) - x(z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x)) + z(x)y_0(x) = 1 + x \\
&\Leftrightarrow x^2y_0(x)z''(x) + (2x^2y_0'(x) - xy_0(x))z'(x) + (x^2y_0''(x) - xy_0'(x) + y_0(x))z(x) = 1 + x \\
&\Leftrightarrow x^3z''(x) + x^2z'(x) = 1 + x
\end{aligned}$$

Ainsi y est solution de (E_2) si et seulement si z' est solution de (E_1).

b) D'après la question 1, on a, pour tout $x \in I$,

$$z'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} + \frac{\lambda}{x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En primitivant on obtient

$$z(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln^2 x}{2} + \lambda \ln x + \mu$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et enfin en multipliant par y_0 on obtient l'expression de la solution générale de (E_2) :

$$y(x) = 1 + \frac{x\ln^2 x}{2} + \lambda x \ln x + \mu x$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3

1) a) En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$y'(x) = z'(\ln x) \times \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad y''(x) = z''(\ln x) \times \frac{1}{x^2} - z'(\ln x) \times \frac{1}{x^2}$$

pour tout $x \in I$.

b) On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in I, x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in I, x^2\left(z''(\ln x)\frac{1}{x^2} - z'(\ln x)\frac{1}{x^2}\right) + xz'(\ln x)\frac{1}{x} + z(\ln x) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(\ln x) + z(\ln x) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + z(t) = 0.\end{aligned}$$

y est donc solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E') : z'' + z = 0$.

c) L'équation caractéristique de (E') est $r^2 + 1 = 0$, ses racines sont i et $-i$. Les solutions de (E') sont donc les fonctions z définies sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$, où α et β sont des réels quelconques.

Par conséquent, les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur I par

$$y(x) = \alpha \cos(\ln x) + \beta \sin(\ln x),$$

où α et β sont des réels quelconques.

2) Soit y la fonction définie par $y(x) = \alpha \cos(\ln x) + \beta \sin(\ln x)$. Alors $y'(x) = -\alpha\dfrac{\sin(\ln x)}{x} + \beta\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ pour tout $x > 0$.

Par conséquent : $\left\{\begin{array}{l} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}\right.$.

La solution cherchée est donc la fonction y définie par $y(x) = \cos(\ln(x))$ pour tout $x \in I$.