Devoir n°13 (non surveillé)

À tout entier naturel n on associe la fonction f_n définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in I,\ f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$ du plan (unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie I Étude de f_n

On suppose dans cette partie que n est non nul.

1) Étudier les variations de f_n sur I. On vérifiera que la valeur du maximum de f_n sur I est $M_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

2) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$. On précisera les coordonnées du ou des points d'intersection.

3) Tracer dans $\mathcal{R}$ les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ainsi que leurs tangentes à l'origine.

Partie II Étude d'une suite d'intégrales

À tout entier naturel n on associe l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx.$$

1) a) Calculer I_0.

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = I_n - \dfrac{e^{-1}}{(n+1)!}$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = 1 - e^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

2) a) Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$.

c) En déduire un encadrement de I_n puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

Partie III Une preuve de l'irrationalité de e

On veut démontrer que e est irrationnel. Pour cela on va raisonner par l'absurde : on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $e = \dfrac{p}{q}$, et on va montrer que cela amène à une contradiction.

1) Montrer que l'intégrale I_n définie dans la partie II ne peut pas être nulle.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$. On pourra utiliser les résultats des questions 1)c) et 2)c) de la partie II.

3) En déduire que $0 < p(q-1)! - \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \leqslant \frac{e}{q+1}$.

4) Montrer que le membre du milieu de cet encadrement est un entier, trouver une contradiction et conclure.

Partie IV Étude de la suite (M_n)

Dans cette partie on étudie la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie en I)1) : $M_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1) a) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{4}$ (on pourra étudier une fonction bien choisie).

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{1-\frac{1}{4n}}$.

2) On pose $H_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que $\dfrac{M_{n+1}}{M_n} = e^{-1}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

b) En déduire que la suite (M_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}H_{n-1}}$.

d) En déduire la limite de la suite (M_n). On admettra que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.