Chapitre 8

LIMITES - CONTINUITÉ

Dans tout le chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ (droite réelle achevée).

I Limite d'une fonction

1 Notion de voisinage

Définition 1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). On dit qu'une propriété portant sur f est vraie* **au voisinage de** *a si elle est vraie :*

- *si $a \in \mathbb{R}$: sur un intervalle de la forme $I \cap [a-\delta, a+\delta]$, où $\delta \in \mathbb{R}_+^*$,*
- *si $a = +\infty$: sur un intervalle de la forme $I \cap [A, +\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$,*
- *si $a = -\infty$: sur un intervalle de la forme $I \cap]-\infty, A]$, où $A \in \mathbb{R}$.*

Remarque : Dire que $x \in [a-\delta, a+\delta]$ revient à dire que $|x-a| \leqslant \delta$, dire que $x \in [A, +\infty[$ revient à dire que $x \geqslant A$, et dire que $x \in]-\infty, A]$ revient à dire que $x \leqslant A$.

2 Limite d'une fonction

• Limite finie

Définition 2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Soit b un réel. On dit que f* **admet b pour limite en** *a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a sur lequel on a $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$.*

Si $a \in \mathbb{R}$, cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\delta, a+\delta]$, on a $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$, ce que l'on peut écrire :

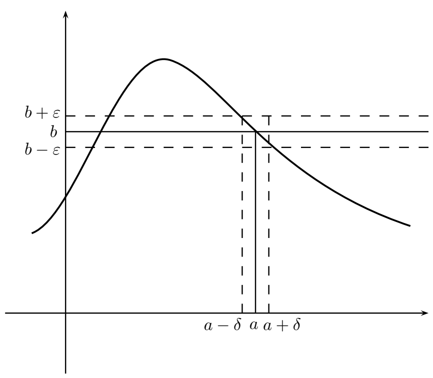
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-b| \leqslant \varepsilon).$$

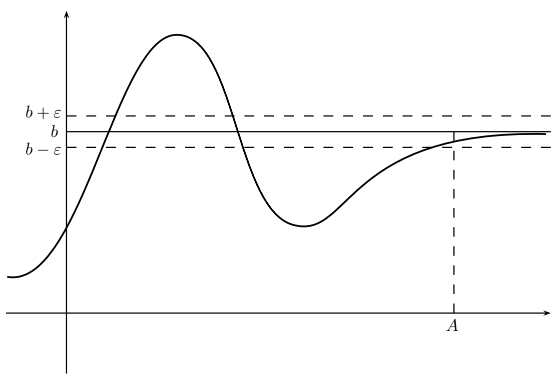
Si $a = +\infty$, cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $x \geqslant A$, on a $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$, ce que l'on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geqslant A \Rightarrow |f(x)-b| \leqslant \varepsilon).$$

Si $a = -\infty$, cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $x \leqslant A$, on a $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$, ce que l'on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leqslant A \Rightarrow |f(x)-b| \leqslant \varepsilon).$$





Proposition 1 *Si b existe, il est unique. On l'appelle* **la limite de f en** *a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ou simplement $\lim\limits_{a} f = b$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$.*

Démonstration :

Supposons que f ait deux limites b_1 et b_2 en a, avec $b_1 \neq b_2$. Soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon < \frac{|b_2 - b_1|}{2}$.

Si $a \in \mathbb{R}$:

Il existe un $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x-a| \leqslant \delta_1$ implique $|f(x) - b_1| \leqslant \varepsilon$, et il existe un $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x-a| \leqslant \delta_2$ implique $|f(x) - b_2| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x-a| \leqslant \delta$ on a donc à la fois $|f(x) - b_1| \leqslant \varepsilon$ et $|f(x) - b_2| \leqslant \varepsilon$. Mais alors $|b_2 - b_1| = |b_2 - f(x) + f(x) - b_1| \leqslant |f(x) - b_2| + |f(x) - b_1| \leqslant 2\varepsilon$. Or $\varepsilon < \frac{|b_2 - b_1|}{2}$ donc $2\varepsilon < |b_2 - b_1|$. On obtient ainsi $|b_2 - b_1| < |b_2 - b_1|$, ce qui est contradictoire.

Si $a = +\infty$:

Il existe un $A_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $x \geqslant A_1$ implique $|f(x) - b_1| \leqslant \varepsilon$, et il existe un $A_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $x \geqslant A_2$ implique $|f(x) - b_2| \leqslant \varepsilon$.

Soit $A = \max(A_1, A_2)$. Si $x \geqslant A$ on a donc à la fois $|f(x) - b_1| \leqslant \varepsilon$ et $|f(x) - b_2| \leqslant \varepsilon$. Mais alors $|b_2 - b_1| = |b_2 - f(x) + f(x) - b_1| \leqslant |f(x) - b_2| + |f(x) - b_1| \leqslant 2\varepsilon$. Or $\varepsilon < \frac{|b_2 - b_1|}{2}$ donc $2\varepsilon < |b_2 - b_1|$. On obtient ainsi $|b_2 - b_1| < |b_2 - b_1|$, ce qui est contradictoire. □

Remarques :

1) On peut toujours se ramener à une limite nulle : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) - b) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x) - b| = 0$ (la définition de la limite est la même dans tous les cas).

2) Si a est un réel non nul, on peut se ramener à une limite en 0 en posant $x = a + h$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = b$ (la définition de la limite est la même dans les deux cas).

• Limite infinie

Définition 3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). On dit que f* **admet $+\infty$ pour limite en** *a si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de a sur lequel on a $f(x) \geqslant A$.*

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$, ou encore $f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $a \in \mathbb{R}$, cela revient à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \delta, a + \delta]$, on a $f(x) \geqslant A$, ce que l'on peut écrire :

$$\forall A \geqslant 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

Si $a = +\infty$, cela revient à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $x \geqslant B$, on a $f(x) \geqslant A$, ce que l'on peut écrire :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

Si $a = -\infty$, cela revient à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $x \leqslant B$, on a $f(x) \geqslant A$, ce que l'on peut écrire :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A).$$

Définition 4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). On dit que f* **admet $-\infty$ pour limite en** *a si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de a sur lequel on a $f(x) \leqslant A$.*

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$, ou encore $f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

3 Limite à gauche, limite à droite

Définition 5 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \mathbb{R}$).*
On dit que f admet une **limite à gauche en** *a si la restriction de f à l'intervalle $I \cap]-\infty, a[$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée $\lim\limits_{a^-} f$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.*

On dit que f admet une **limite à droite en** *a si la restriction de f à l'intervalle $I \cap]a, +\infty[$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée $\lim\limits_{a^+} f$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.*

Proposition 2 *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$.*

Remarque : La réciproque est fausse. Considérons par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Alors $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas.

Définition 6 *Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction (où $a \in I$). On dit que f admet une limite en a si $f_{|I \cap]-\infty,a[}$ et $f_{|I \cap]a,+\infty[}$ admettent la même limite en a. Cette limite commune est alors appelée limite de f en a.*

On peut ainsi écrire, par exemple, que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ alors que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0.

4 Propriétés

Proposition 3 *Si f admet une limite finie en a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$), alors f est bornée au voisinage de a.*

Démonstration :

Supposons que $a \in \mathbb{R}$. Soit b la limite de f en a. Par définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$, on a $|f(x) - b| \leqslant 1$, soit $b - 1 \leqslant f(x) \leqslant b + 1$: la fonction est donc bornée sur $I \cap [a - \delta, a + \delta]$.

Supposons que $a = +\infty$. Soit b la limite de f en a. Par définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe un $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in I$ tel que $x \geqslant A$, on a $|f(x) - b| \leqslant 1$, soit $b - 1 \leqslant f(x) \leqslant b + 1$: la fonction est donc bornée sur $I \cap [A, +\infty[$. □

Proposition 4 *Si f admet $b \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ pour limite en a, alors, pour tout réel c tel que $0 < c < b$, il existe un voisinage de a sur lequel on a $f(x) > c$.*

En particulier, f prend des valeurs strictement positives au voisinage de a.

Démonstration : Il suffit d'appliquer la définition de la limite (avec $\varepsilon = b - c$ si b est réel). □

5 Opérations sur les limites

• Limites finies

Dans toutes les propositions suivantes, f et g sont des fonctions définies sur I et a est un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Les démonstrations sont faites dans le cas où $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 5 *Soient $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Si $\lim_a f = b_1$ et que $\lim_a g = b_2$, alors $\lim_a (f + g) = b_1 + b_2$.*

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite (appliquée à $\frac{\varepsilon}{2}$), il existe un $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_1$ implique $|f(x) - b_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et il existe un $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_2$ implique $|g(x) - b_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - a| \leqslant \delta$, on a alors $|f(x) + g(x) - (b_1 + b_2)| = |(f(x) - b_1) + (g(x) - b_2)| \leqslant |f(x) - b_1| + |g(x) - b_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$. □

Proposition 6 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Si $\lim_a f = b$ alors $\lim_a (\alpha f) = \alpha b$.*

Démonstration :

Si $\alpha = 0$ c'est immédiat. Supposons $\alpha \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite (appliquée à $\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$), il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, et donc $|\alpha f(x) - \alpha b| = |\alpha|.|f(x) - b| \leqslant |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \leqslant \varepsilon$. □

Proposition 7 *Si $\lim_a f = 0$ et que la fonction g est bornée au voisinage de a, alors $\lim_a (f \times g) = 0$.*

Démonstration :

La fonction g est bornée au voisinage de a, donc il existe $\delta_1 > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_1$ implique $|g(x)| \leqslant M$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite (appliquée à $\frac{\varepsilon}{M}$), il existe un $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_2$ implique $|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$.

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - a| \leqslant \delta$, on a alors $|f(x)g(x)| = |f(x)| \times |g(x)| \leqslant M \frac{\varepsilon}{M} \leqslant \varepsilon$. □

Corollaire 8 *Soient $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Si $\lim_a f = b_1$ et que $\lim_a g = b_2$, alors $\lim_a (f \times g) = b_1 \times b_2$.*

Démonstration :

On a $f(x)g(x) - b_1 b_2 = f(x)g(x) - b_1 g(x) + b_1 g(x) - b_1 b_2 = (f(x) - b_1)g(x) + b_1(g(x) - b_2)$. Or $\lim_{x\to a} (f(x) - b_1) = 0$ et g est bornée au voisinage de a (car elle a une limite finie en a), donc $\lim_{x\to a} (f(x) - b_1)g(x) = 0$. D'autre part, $\lim_{x\to a} (g(x) - b_2) = 0$, donc $\lim_{x\to a} b_1(g(x) - b_2) = 0$. Par conséquent $\lim_{x\to a} (f(x)g(x) - b_1 b_2) = 0$. □

Proposition 9 *Si $\lim_a f = b \in \mathbb{R}^*$, alors $\displaystyle\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{b}$.*

Démonstration :

Puisque $b \neq 0$, il existe, d'après la proposition 4, un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas, donc sur lequel $\frac{1}{f}$ est définie.

Supposons $b > 0$. Soit c un réel tel que $0 < c < b$. D'après la même proposition, il existe un $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_1$ implique $f(x) > c$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_2$ implique $|f(x) - b| \leqslant bc\varepsilon$.

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - a| \leqslant \delta$, on a alors $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - f(x)}{bf(x)}\right| = \frac{|f(x) - b|}{bf(x)} \leqslant \frac{bc\varepsilon}{bc} \leqslant \varepsilon$. □

Corollaire 10 *Si* $\lim_a f = b_1$ *et que* $\lim_a g = b_2 \in \mathbb{R}^*$, *alors* $\lim_a \dfrac{f}{g} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

• Limites infinies

On admet les résultats figurant dans les tableaux suivants. FI signifie forme indéterminée.

$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a (f+g)$
$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI

$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a (f \times g)$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	FI

$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a \frac{f}{g}$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$\ell > 0$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$\ell > 0$	0^+	$+\infty$
0	0	FI
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

6 Limite d'une fonction composée

Proposition 11 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $f(I) \subset J$. *Soient* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$. *Si* $\lim_a f = b$ *et que* $\lim_b g = c$, *alors* $\lim_a g \circ f = c$.

Démonstration :
Il y a de nombreux cas à traiter selon que a, b et c sont finis ou non. Supposons par exemple que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\lim_{y \to b} g(y) = c$ donc il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in J$, $|y - b| \leqslant \delta$ implique $|g(y) - c| \leqslant \varepsilon$. De même, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ donc il existe un $\gamma > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \gamma$ implique $|f(x) - b| \leqslant \delta$. Par conséquent, si $|x - a| \leqslant \gamma$, alors $|g(f(x)) - c| \leqslant \varepsilon$. □

Exemple : Soit à calculer $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$. On a $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim_{y \to 0} e^y = 1$, donc $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

7 Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 12 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. *La fonction* f *tend vers* b *en* a *si et seulement si pour toute suite* (u_n) *d'éléments de* I *qui tend vers* a, *la suite* $(f(u_n))$ *tend vers* b.

Autrement dit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, \left(\lim_{n \to +\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b \right).$$

Démonstration : (Dans le cas où $a, b \in \mathbb{R}$)
($\Rightarrow$) Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Soit (u_n) une suite d'éléments de I telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$. Montrons que $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x \to a} f(x) = b$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$. De plus, $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - a| \leqslant \delta$.
Si $n \geqslant n_0$, on a donc $|f(u_n) - b| \leqslant \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Supposons que pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b$. Montrons que $\lim_{x \to a} f(x) = b$.
Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer :

$$(*) \quad \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in I, (|x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon).$$

Supposons le contraire, i.e. :

$$\forall\, \delta > 0, \exists\, x \in I, (|x - a| \leqslant \delta \text{ et } |f(x) - b| > \varepsilon).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $\delta = \frac{1}{n}$ dans ce qui précède, on voit qu'il existe un $x_n \in I$ tel que $|x_n - a| \leqslant \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - b| > \varepsilon$. On construit ainsi une suite (x_n) d'éléments de I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|x_n - a| \leqslant \frac{1}{n}$ donc la suite (x_n) converge vers a, mais $|f(x_n) - b| > \varepsilon$ donc la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers b, ce qui contredit notre première hypothèse. Ainsi $(*)$ est vérifié. □

Remarques :

1) On utilisera plus fréquemment cette proposition dans le sens direct. Par exemple $\lim_{n \to +\infty} \sin \dfrac{1}{n} = 0$ car $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$. De même $\lim_{n \to +\infty} n \sin \dfrac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ car $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (limite usuelle).

2) Pour montrer qu'une fonction f n'a pas de limite en a, on peut essayer de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers a et telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ tendent vers des limites différentes.

Montrons par exemple que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$. Considérons les suites de termes généraux $u_n = 2n\pi$ et $v_n = (2n+1)\pi$. Ces deux suites tendent vers $+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = 1$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(v_n) = -1$. Si la fonction cosinus avait une limite ℓ en $+\infty$, alors les suites $(\cos(u_n))$ et $(\cos(v_n))$ tendraient aussi vers ℓ. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas.

8 Limites et relation d'ordre

• Passage à la limite

Proposition 13 *Si $\lim\limits_a f = b_1$, que $\lim\limits_a g = b_2$ ($a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$) et que $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $b_1 \leqslant b_2$.*

Démonstration :

Si on avait $b_1 > b_2$, alors d'après la proposition 4 on aurait $f(x) > g(x)$ au voisinage de a, ce qui est contraire aux hypothèses. □

Remarques :

1) Pour pouvoir faire un passage à la limite, il faut avoir démontré auparavant que les limites existent.

2) Un passage à la limite donne toujours une inégalité au sens large. Si on a $f < g$ au voisinage de a, on ne peut pas en déduire que $b_1 < b_2$ (considérer par exemple $f : x \mapsto 0$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $+\infty$).

• Théorème des gendarmes

Proposition 14 *Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = b$ ($b \in \mathbb{R}$), alors $\lim\limits_a g = b$ également.*

Démonstration :

Supposons que $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_1$ implique $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$. Il existe un $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_2$ implique $|h(x) - b| \leqslant \varepsilon$. Enfin, par hypothèse, il existe un $\delta_3 > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|x - a| \leqslant \delta_3$ implique $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Si $|x - a| \leqslant \delta$, on a alors $f(x) - b \leqslant g(x) - b \leqslant h(x) - b$, donc $-\varepsilon \leqslant g(x) - b \leqslant \varepsilon$, soit $|g(x) - b| \leqslant \varepsilon$.

La démonstration est analogue si $a = \pm\infty$. □

Autres versions :

Proposition 15 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $|f| \leqslant g$ au voisinage de a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Si $\lim\limits_a g = 0$, alors $\lim\limits_a f = 0$.*

Démonstration : Il suffit d'écrire que $-g \leqslant f \leqslant g$ et d'appliquer le résultat précédent. □

Proposition 16 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Si $\lim\limits_a f = +\infty$, alors $\lim\limits_a g = +\infty$. Si $\lim\limits_a g = -\infty$, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.*

9 Limite d'une fonction monotone

Théorème 17 *(Théorème de la limite monotone) Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Alors :*

(i) Si f est majorée, f admet une limite finie en b (égale à $\sup\limits_{]a,b[} f$). Sinon, $\lim\limits_b f = +\infty$.

(ii) Si f est minorée, f admet une limite finie en a (égale à $\inf\limits_{]a,b[} f$). Sinon, $\lim\limits_a f = -\infty$.

(iii) f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de l'intervalle $]a, b[$.

Démonstration :

(i) Supposons que f est majorée. Alors $s = \sup\limits_{]a,b[} f$ existe. Montrons que $\lim\limits_b f = s$.

Soit $\varepsilon > 0$. Le plus petit majorant de f est s donc $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de f. Il existe donc $x_0 \in]a, b[$ tel que $s - \varepsilon \leqslant f(x_0)$. Or la fonction f est croissante, donc pour tout $x \in]x_0, b[$, on a $s - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant s$.

Ainsi, si $b \in \mathbb{R}$, en posant $\delta = b - x_0$, on voit que pour tout $x \in]a, b[$, si $|x - b| \leqslant \delta$, alors $|f(x) - s| \leqslant \varepsilon$. Si $b = +\infty$, on voit que pour tout $x \in]a, b[$, si $x \geqslant x_0$, alors $|f(x) - s| \leqslant \varepsilon$. Dans les deux cas, cela signifie que $\lim\limits_b f = s$.

Supposons maintenant que f n'est pas majorée et montrons que $\lim\limits_b f = +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \geqslant A$. Or la fonction f est croissante, donc pour tout $x \in]x_0, b[$, on a $f(x) \geqslant A$.

Ainsi, si $b \in \mathbb{R}$, en posant $\delta = b - x_0$, on voit que pour tout $x \in]a, b[$, si $|x - b| \leqslant \delta$, alors $f(x) \geqslant A$. Si $b = +\infty$, on voit que pour tout $x \in]a, b[$, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant A$. Dans les deux cas, cela signifie que $\lim\limits_{b} f = +\infty$.

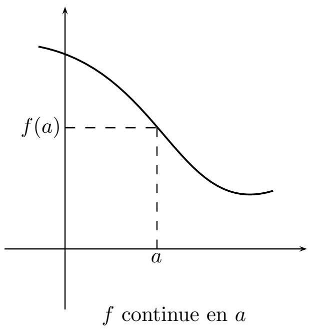
Le (ii) est analogue au (i), et pour le (iii) il suffit d'appliquer le (i) à $f_{|\,]a,c[}$ (qui est majorée par $f(c)$) et le (ii) à $f_{|\,]c,b[}$ (qui est minorée par $f(c)$) où $c \in]a, b[$. $\square$

Remarque : On peut évidemment énoncer un théorème analogue pour les fonctions décroissantes.

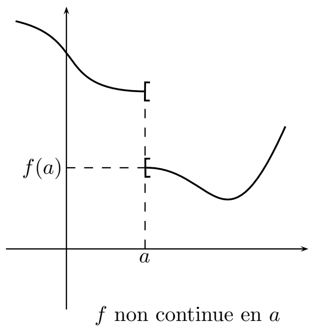
II Continuité

1 Continuité en un point

Définition 7 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un point de I. On dit que f est* **continue en** *a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*



f continue en a



f non continue en a

Exemple : La fonction partie entière $x \mapsto E(x)$ est continue en tout point non entier, mais elle est discontinue en tout point entier. En effet, si $p \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x \to p^+} E(x) = p$ alors que $\lim\limits_{x \to p^-} E(x) = p - 1$, donc $\lim\limits_{x \to p} E(x)$ n'existe pas.

Remarque : Si une fonction f est définie en un point a et qu'elle admet une limite finie en a, cette limite est nécessairement égale à $f(a)$ (preuve : prendre $x = a$ dans la définition de la limite). Par conséquent elle est continue en a.

2 Continuité à gauche, continuité à droite

Définition 8 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un point de I. On dit que f est* **continue à gauche en** *a si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a]$ est continue en a. On dit que f est* **continue à droite en** *a si la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$ est continue en a.*

Autrement dit, f est continue à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ et elle est continue à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Exemple : En tout $p \in \mathbb{Z}$ la fonction partie entière est continue à droite mais pas à gauche.

Proposition 18 *f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.*

3 Prolongement par continuité en un point

Définition 9 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R}$ une extrémité de I qui n'appartient pas à I. On dit que f est* **prolongeable par continuité en** *a si elle admet une limite finie en a.*

En posant $f(a)$ égal à cette limite, on prolonge alors f en une fonction définie sur $I \cup \{a\}$ (que l'on note encore f en général) qui est continue en a.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. On sait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ (limite usuelle), donc f est prolongeable par continuité en 0. En posant $f(0) = 1$ on obtient une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ qui est continue en 0.

4 Continuité sur un intervalle

Définition 10 *$f : I \to \mathbb{R}$ est* **continue sur** *I si elle est continue en tout point de I.*

Interprétation graphique : f est continue sur I si on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou simplement $\mathcal{C}(I)$.

5 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 19 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

(i) Soit $a \in I$. Si f et g sont continues en a, alors $f + g$, αf (où $\alpha \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont continues en a. Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

(ii) Si f et g sont continues sur I, alors $f + g$, αf (où $\alpha \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont continues sur I. Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Démonstration : Conséquences des théorèmes sur les limites. □

On en déduit que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$, et que les fonctions rationnelles (quotients de deux fonctions polynomiales) sont continues là où elles sont définies.

Proposition 20 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.*

(i) Soit $a \in I$. Si f est continue en a et que g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

(ii) Si f continue sur I et que g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration : Conséquence du théorème sur la limite d'une fonction composée. □

Les fonctions usuelles étudiées au chapitre 4 sont toutes continues là où elles sont définies. Les fonctions formées à partir de ces fonctions au moyen des opérations précédentes le sont donc aussi.

Exercice 1 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ si $0 < x < 1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

Proposition 21 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et (u_n) une suite d'éléments de I. Soit $a \in I$. Si f est continue en a et que la suite (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration : Conséquence de la caractérisation séquentielle de la limite (proposition 12). □

Remarques :

1) Sans la continuité le théorème est faux. Par exemple, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\lfloor -\frac{1}{n} \right\rfloor = -1$ et non 0.

2) On utilise fréquemment cette proposition pour déterminer la limite d'une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$: si la suite (u_n) converge vers ℓ et que f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.

6 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 22 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration :

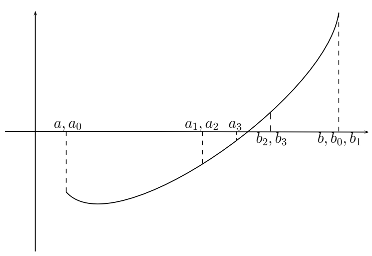
Supposons par exemple que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par récurrence de la manière suivante.

On pose d'abord $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et on regarde le signe de $f(c_n)$.

Si $f(c_n) < 0$, alors on pose $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$, sinon on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$.



Par récurrence immédiate on voit que $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$ pour tout n. Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

De plus, la suite (a_n) est croissante puisque pour tout n, on a soit $a_{n+1} = a_n$, soit $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \geqslant \dfrac{a_n + a_n}{2} = a_n$, et la suite (b_n) est décroissante puisque pour tout n, on a soit $b_{n+1} = b_n$, soit $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant \dfrac{b_n + b_n}{2} = b_n$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Par conséquent elles convergent vers la même limite. Notons-la c. On a $c \in [a, b]$ et, puisque f est continue, les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers $f(c)$. Or, par construction, on a $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$ pour tout n, donc en passant à la limite on obtient $f(c) \leqslant 0$ et $f(c) \geqslant 0$, d'où $f(c) = 0$. □

Remarques :

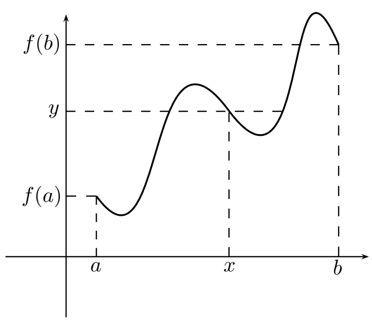
1) c n'est pas forcément unique.

2) Sans la continuité le théorème est faux : considérer par exemple la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = 1$ si $0 \leqslant x < 1$ et $f(x) = -1$ si $1 \leqslant x \leqslant 2$.

3) La méthode utilisée dans la démonstration s'appelle la **dichotomie**.

Théorème 23 *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue sur $[a,b]$, alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.*

Autrement dit, toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f.



Démonstration : Appliquer la proposition précédente à la fonction $x \mapsto f(x) - y$. □

7 Image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition 24 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration :

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. On va montrer que, pour tous $a, b \in f(I)$, le segment $[a,b]$ est inclus dans $f(I)$.

Soient $a, b \in f(I)$. Il existe donc $x, y \in I$ tels que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Mais alors, pour tout $c \in [a,b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in [x,y]$ tel que $f(z) = c$. Or $[x,y] \subset I$, donc $z \in I$, et donc $c \in f(I)$. □

Remarque : Attention : l'image d'un intervalle par une fonction continue n'est pas forcément un intervalle de même nature. Par exemple, l'image de l'intervalle $]-1,2]$ par la fonction $x \mapsto x^2$ est l'intervalle $[0,4]$. L'image de l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ par la fonction sinus est l'intervalle $[-1,1]$.

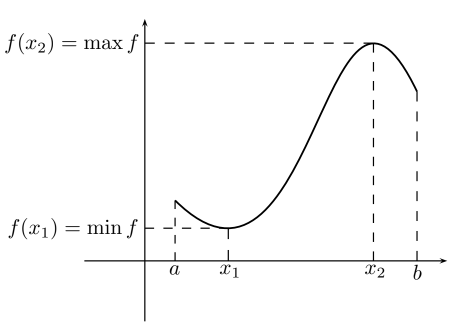
On a cependant le résultat suivant (que l'on admet) :

Proposition 25 *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Attention : en général, $f([a,b])$ n'est pas égal à $[f(a), f(b)]$. Par exemple, l'image de l'intervalle $[-2,2]$ par la fonction $x \mapsto x^2$ est l'intervalle $[0,4]$ et non l'intervalle $[4,4]$.

Corollaire 26 *(Théorème des bornes atteintes) Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$, et elle atteint ses bornes.*

Cela signifie qu'il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que $f(x_1) = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $f(x_2) = \sup\limits_{[a,b]} f$.



8 Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Proposition 27 *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$, et sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même monotonie que f.*

Démonstration :

On suppose que f est strictement croissante.

$f : I \to J$ est surjective car $J = f(I)$. Montrons qu'elle est injective. Soient $y \in J$ et soient x_1, $x_2 \in I$ deux antécédents de y par f. Si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$, soit $y < y$: impossible. Si $x_1 > x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$, soit $y > y$: impossible. Par conséquent $x_1 = x_2$. f est donc injective.

Montrons ensuite que f^{-1} est strictement croissante. Soient $y_1, y_2 \in J$ avec $y_1 < y_2$. Soient $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si on avait $x_1 \geqslant x_2$ alors on aurait $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, soit $y_1 \geqslant y_2$: impossible. Par conséquent, $x_1 < x_2$. f^{-1} est donc strictement croissante.

Montrons enfin que f^{-1} est continue. Soit $b \in J$ et soit $a = f^{-1}(b)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $y \in J$:

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant a + \varepsilon \Leftrightarrow f(a - \varepsilon) \leqslant y \leqslant f(a + \varepsilon),$$

en supposant que $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$ sont dans I, sinon on a immédiatement $a - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y)$ (resp. $f^{-1}(y) \leqslant a + \varepsilon$).

Posons donc $\delta = \min(b - f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon) - b)$. Alors si $|y - b| \leqslant \delta$, on a $b - \delta \leqslant y \leqslant b + \delta$, d'où $f(a - \varepsilon) \leqslant y \leqslant f(a + \varepsilon)$, et donc $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| \leqslant \varepsilon$. □

Corollaire 28 *Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration :

Par le théorème des valeurs intermédiaires, 0 admet un antécédent par f. De plus, f est bijective, donc cet antécédent est unique. □

III Notions sur les fonctions à valeurs complexes

1 Définitions

On considère ici des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ ou $\mathbb{C}^I$ l'ensemble des fonctions de ce type.

Définition 11 *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. La* **partie réelle** *de f est la fonction $\mathrm{Re}\, f : I \to \mathbb{R}$ définie par $(\mathrm{Re}\, f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$. La* **partie imaginaire** *de f est la fonction $\mathrm{Im}\, f : I \to \mathbb{R}$ définie par $(\mathrm{Im}\, f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$. La fonction* **conjuguée** *de f est la fonction $\overline{f} : I \to \mathbb{C}$ définie par $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.*

Exemple : Soit $f(x) = (3 + ix)e^{x - ix^2}$. On peut écrire $f(x) = (3 + ix)e^x e^{-ix^2} = e^x(3 + ix)(\cos x^2 - i \sin x^2)$, donc $(\mathrm{Re}\, f)(x) = e^x(3 \cos x^2 + x \sin x^2)$ et $(\mathrm{Im}\, f)(x) = e^x(x \cos x^2 - 3 \sin x^2)$. Par ailleurs, $\overline{f}(x) = (3 - ix)e^{x + ix^2}$.

Il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$, donc on ne peut pas parler ici de fonction majorée ou minorée. En revanche on peut définir la notion de fonction bornée :

Définition 12 *$f : I \to \mathbb{C}$ est* **bornée** *s'il existe un réel positif M tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in I$.*

Dans le plan complexe, cela revient à dire que les images par f des éléments de I appartiennent au disque de centre O et de rayon M.

Proposition 29 *$f : I \to \mathbb{C}$ est bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont bornées.*

2 Limite d'une fonction à valeurs complexes

Définition 13 *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Soit b un complexe. On dit que f* **admet b pour limite en** *a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a sur lequel on a $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$.*

La définition est la même que pour les fonctions à valeurs réelles en remplaçant la valeur absolue par le module.

Proposition 30 *Si b existe, il est unique. On l'appelle* **la limite de f en** *a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ou simplement $\lim\limits_a f = b$.*

On peut définir la notion de limite à gauche et à droite en un point, mais écrire que $\lim\limits_a f = +\infty$ ou $-\infty$ n'a aucun sens pour une fonction à valeurs complexes puisqu'il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$.

Les propositions suivantes permettent de se ramener à des limites réelles.

Proposition 31 $\lim_a f = b$ *si et seulement si* $\lim_a |f - b| = 0$.

Proposition 32 $f : I \to \mathbb{C}$ *admet une limite en* a *si et seulement si* $\operatorname{Re} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *admettent une limite en* a*. Dans ce cas,* $\lim_a f = \lim_a (\operatorname{Re} f) + i \lim_a (\operatorname{Im} f)$.

Démonstration : Utiliser la proposition précédente, les inégalités $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$ et $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$ et l'égalité $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$. □

Proposition 33 *Si* $\lim_a f = b_1$ *et que* $\lim_a g = b_2$*, alors* $\lim_a (f+g) = b_1 + b_2$, $\lim_a \alpha f = \alpha b_1$ *(où* $\alpha \in \mathbb{C}$*), et* $\lim_a fg = b_1 b_2$*. Si* $b_2 \neq 0$*, alors* $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{b_1}{b_2}$.

Démonstration : Passer aux parties réelle et imaginaire. □

Proposition 34 *Si* $f : I \to \mathbb{C}$ *admet une limite finie en* a*, alors* f *est bornée au voisinage de* a.

Démonstration : Passer aux parties réelle et imaginaire. □

Remarque : Les propositions portant sur les fonctions à valeurs réelles qui font intervenir la relation d'ordre (passage à la limite, théorème des gendarmes, limite d'une fonction monotone) ne sont plus valables dans $\mathbb{C}$ puisqu'il n'y a pas d'ordre.

3 Continuité

Définition 14 $f : I \to \mathbb{C}$ *est* **continue en** $a \in I$ *si* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$*.* f *est* **continue sur** I *si elle est continue en tout point de* I.

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

D'après les théorèmes sur les limites :

Proposition 35 $f : I \to \mathbb{C}$ *est continue en* a *(resp. sur* I*) si* $\operatorname{Re} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont continues en* a *(resp. sur* I*).*

Proposition 36 *Si* f *et* g *sont continues en* a *(resp. sur* I*), alors* $f + g$, αf *(où* $\alpha \in \mathbb{C}$*) et* $f \times g$ *aussi. Si, de plus,* $g(a) \neq 0$ *(resp.* g *ne s'annule pas sur* I*), alors* $\frac{f}{g}$ *est continue en* a *(resp. sur* I*).*