Fiche d'exercices : Limites - Continuité

Exercice 1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Toute fonction croissante est minorée.
2) Si f est croissante sur $[0,1]$, alors f est bornée sur $[0,1]$.
3) Si f est croissante sur $[0,1]$, alors f est continue sur $[0,1]$.
4) Si f est croissante sur $]0,1[$, alors f est bornée sur $]0,1[$.
5) Si f et g ne sont pas continues en x_0, alors $f+g$ non plus.
6) Toute fonction périodique est continue.
7) Toute fonction continue est bornée.
8) Toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment.
9) Toute fonction définie sur un segment est bornée sur ce segment.
10) Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ est bornée.
11) Si f est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors il existe un réel a tel que f est décroissante sur $[a,+\infty[$.

Exercice 2 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \ ; \ \lim_{x\to0} \frac{\lfloor x \rfloor}{|x|} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}.$$

Exercice 3 Soient $a,b>0$. Calculer $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{b}{x}\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$.

Exercice 4 Calculer $\lim\limits_{x\to0} \sin x \sin \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0} \cos x \cos \frac{1}{x}$.

Exercice 5 Étudier la continuité des fonctions définies par :

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x(x-1)^2}} & \text{si } x\neq0,1 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

6) $f(x) = (x^2+bx+c)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

7) $f(x) = \{x\}(1-\{x\})$ où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 6 Les applications suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$$f_1 : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln x}{x} \end{array} \ ; \ f_2 : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln x \end{array} \ ; \ f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{|x|} \end{array}.$$

Exercice 7 Montrer que la limite de ln en $+\infty$ est $+\infty$.

Exercice 8

1) En quels points la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est-elle continue ?
2) Même question pour la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=-x$ sinon.

Exercice 9

1) Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodiques et croissantes.
2) Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodiques et admettant une limite finie en $+\infty$.

Exercice 10 Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 11 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x)$.

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
2) En déduire que f est constante.

Exercice 12 Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Montrer que si $|f|$ est constante sur I, alors f aussi.

Exercice 14 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|$ existe. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe.

Exercice 15 Montrer que toute fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ admet un point fixe.

Exercice 16 Montrer qu'une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe.

Exercice 17 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe $x\in[0,1/2]$ tel que $f(x)=f(x+1/2)$.

Exercice 18 Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\sup\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{[a,b]} g$. Montrer qu'il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=g(x_0)$.

Exercice 19 Un marcheur parcourt 12 km en 2 heures. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a parcouru exactement 6 km.

Exercice 20 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.