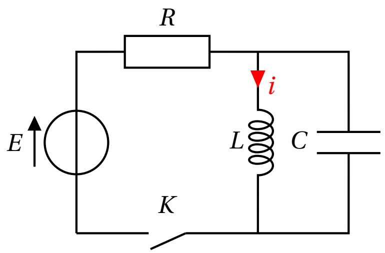
TD12 : Oscillateur amorti en régime transitoire

Exercice 1 : Circuit RLC série en régime transitoire

Un circuit RLC série est alimenté depuis longtemps par une source idéale de tension de fem constante E. À la date $t = 0$, on éteint le générateur.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.
2. On pose $RC = \frac{2L}{R} = \tau$. Calculer $u_C(t)$ puis tracer l'allure de son graphe. Calculer l'intensité $i(t)$ qui circule dans la maille.
3. Même question dans le cas où $\frac{RC}{2} = \frac{2L}{R} = \tau$.
4. Même question dans le cas où $\frac{4RC}{5} = \frac{5L}{R} = \tau$.

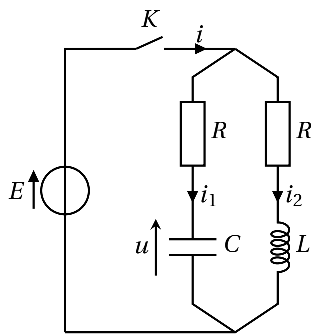
⋆ Exercice 2 : Circuit RLC parallèle



Un générateur alimente le circuit ci-contre, dans lequel la bobine et le condensateur sont parfaits. Initialement l'intensité i est nulle et le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ du courant dans la branche de la bobine. En déduire l'expression du facteur de qualité Q.
2. On donne $R = 100\,\Omega$, $L = 50\,\text{mH}$ et $C = 20\,\mu\text{F}$. En quel régime d'amortissement se trouve-t-on ?
3. Déterminer $i(t)$ et tracer l'allure de son graphe.

⋆ Exercice 3 : Évolution simultanée du courant dans une bobine et un condensateur



Le circuit comporte un condensateur de capacité C en série avec une résistance R. Cette branche est en parallèle avec une branche comportant une bobine d'inductance L et de résistance R. les valeurs de R, L et C sont telles que $RC = \dfrac{L}{R} = \tau$. L'ensemble est alimenté par un générateur de fem E comme l'indique le schéma ci-contre.

1. Après avoir laissé l'interrupteur K fermé très longtemps, on l'ouvre à $t = 0$. Exprimer i, i_1, i_2 et u à $t = 0^-$ puis $t = 0^+$.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
3. Dans quel régime se trouve-t-on ? Exprimer $u(t)$ à tout instant.

⋆ Exercice 4 : Régime critique

Un condensateur de capacité $C = 10\,\mu\text{F}$, initialement chargé sous une tension $U_0 = 6\text{V}$, est connecté à l'instant $t = 0$ à une bobine de résistance R et d'inductance $L = 25\,\text{mH}$.

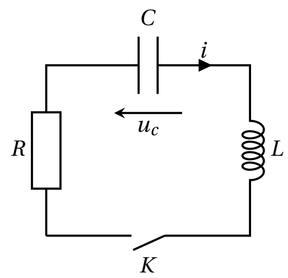
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur.
2. Le régime étudié est le régime critique. Déterminer R. Exprimer alors $u(t)$. Tracer $u(t)$.
3. En déduire l'intensité $i(t)$. Tracer $i(t)$.
4. Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R entre $t = 0$ et $t = \infty$?

⋆ Exercice 5 : Régime pseudo-périodique

Un condensateur de capacité $C = 10\,\mu\text{F}$, initialement chargé sous une tension $U_0 = 6\text{V}$, est connecté à l'instant $t = 0$ à une bobine de résistance R et d'inductance $L = 25\,\text{mH}$. Le régime étudié est pseudo-périodique et la pseudo-période vaut $T = 5{,}0\,\text{ms}$.

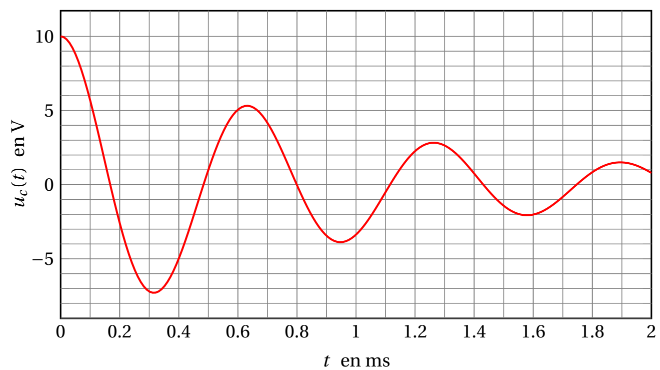
1. Déterminer la résistance R.
2. Exprimer $u(t)$.

⋆ Exercice 6 : Étude expérimentale



On étudie le circuit RLC série ci-contre. Le condensateur a été chargé, pour $t < 0$, par un dispositif non représenté sur ce schéma. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on enregistre la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.

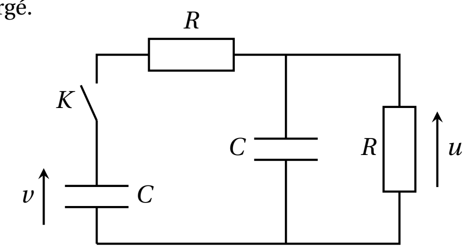
1. Mesurer la pseudopériode T et le décrément logarithmique δ. En déduire la valeur de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.
2. Sachant que $R = 100\,\Omega$, calculer L et C.
3. Évaluer numériquement l'énergie qui a été dissipée par effet Joule au cours de la première oscillation.



TD12 : Oscillateur amorti en régime transitoire

⋆⋆ Exercice 7 : Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur

À $t = 0$, on ferme K, la tension v valant V_0 (C a été chargé, à $t < 0$, par un dispositif non représenté), l'autre condensateur de même capacité C étant déchargé.



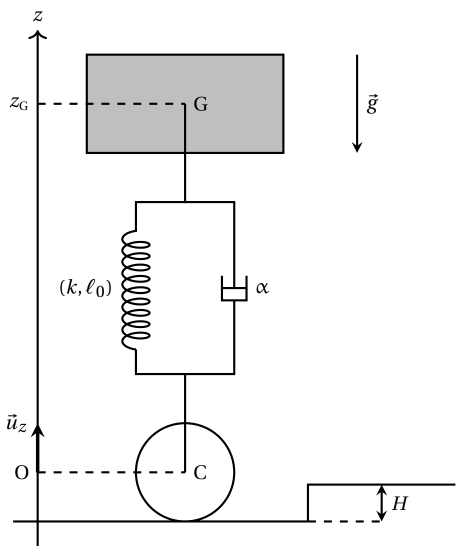
1. Établir l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par $u(t)$. On notera $\tau = RC$. Dans quel régime se trouve-t-on ?
2. Exprimer $u(0^+)$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+}$ et $u(\infty)$.
3. Calculer $u(t)$ puis tracer son graphe.

   On notera $\tau_1 = \frac{2\tau}{3-\sqrt{5}}$ et $\tau_2 = \frac{2\tau}{3+\sqrt{5}}$.

⋆⋆ Exercice 8 : Étude d'une suspension

La suspension d'un véhicule relie une roue, de centre C, à l'habitacle, de masse totale $M = 1000$ kg et de centre d'inertie G. On suppose que l'axe CG reste toujours vertical. On modélise la suspension par l'association d'un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et d'un amortisseur qui s'oppose au déplacement relatif de l'habitacle et de la roue en exerçant sur l'habitacle une force proportionnelle à la vitesse, de constante d'amortissement α. Le mouvement vertical de l'habitacle est repéré par un axe (Oz) ascendant. La résultante des forces exercées par la suspension sur l'habitacle s'écrit sous la forme:

$$\vec{F} = -k\left(z_G - z_C - \ell_0\right)\vec{u}_z - \alpha\left(\frac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}t}\right)\vec{u}_z$$



Dans la première phase du mouvement, le véhicule roule à vitesse constante sur une route plane et horizontale. L'origine de l'axe (Oz) est défini de telle manière que $z_C = 0$ pendant cette première phase. À la date $t = 0$, la roue rencontre une marche de hauteur H. On fait l'hypothèse que l'altitude du point C passe instantanément de $z = 0$ à $z = H$ (on néglige la taille de la roue). Dans la deuxième phase du mouvement, le véhicule poursuit son mouvement à vitesse constante sur une route plane et horizontale. L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de l'habitacle pour $t > 0$.

1. Exprimer la position d'équilibre z_{eq} du point G, dans la deuxième phase du mouvement, en fonction de H, ℓ_0, M, g et k.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par z_G.
3. On pose $Z = z_G - z_{eq}$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par Z ?
4. Le constructeur a choisi les paramètres de la suspension de manière à ce que le mouvement de l'habitacle après un obstacle soit le plus court possible lorsque la véhicule roule à vide. Exprimer dans ce cas α en fonction de k et M.
5. Le même véhicule transporte désormais quatre personnes, de masse totale $m = 300$ kg. Justifier que l'on se trouve désormais en régime pseudopériodique. Exprimer la pseudo-période T en fonction de k, m et M.
6. Pour qu'une voiture soit confortable, il faut que les oscillations résultant d'un défaut de la route aient une période adaptée à l'organisme humain, comme par exemple la période de marche qui vaut environ une seconde. Calculer la raideur du ressort k et en déduire celle de α, du facteur de qualité Q et de la durée τ du régime transitoire.

Solutions :

Ex1 : 2. $u_C(t) = E\left[\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]e^{-t/\tau}$ $\quad i(t) = -\frac{2E}{R}\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$

3. $u_C(t) = E\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$ $\quad i(t) = -\frac{E}{R}\,t\,e^{-t/\tau}$

4. $u_C(t) = \frac{E}{3}\left(4e^{-t/\tau} - e^{-4t/\tau}\right)$ $\quad i(t) = \frac{4E}{3R}\left(e^{-4t/\tau} - e^{-t/\tau}\right)$

Ex2 : 1. $\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{LC} = \frac{I_0}{LC}$; $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ $\quad$ 2. régime pseudopériodique

3. $i(t) = I_0\left[1 - \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\right]$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Ex3 : 1. $u(0^-) = E$; $i(0^-) = i_2(0^-) = \frac{E}{R}$; $i_1(0^-) = 0$ $\quad u(0^+) = E$; $i(0^+) = 0$; $i_2(0^+) = \frac{E}{R}$; $i_1(0^+) = -\frac{E}{R}$

2. $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = 0$

3. régime critique : $u(t) = Ee^{-t/\tau}$

Ex4 : 2. $R = 100\,\Omega$ $\quad u(t) = U_0\left(1 + \frac{\omega_0}{2Q}t\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$

3. $i(t) = -CU_0\frac{\omega_0^2}{4Q^2}\,t\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ $\quad$ 4. $W_J = 0,18\,\mathrm{mJ}$.

Ex5 : 1. $R = 78\,\Omega$ $\quad$ 2. $u(t) = U_0\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Ex6 : 2. $L = 0,05\,\mathrm{H}$; $C = 0,2\,\mu\mathrm{F}$; $W_J = 7\,\mu\mathrm{J}$

Ex7 : 1. $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau^2} = 0$; régime apériodique $\quad$ 2. $u(0^+) = 0$; $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{V_0}{\tau}$; $u(\infty) = 0$

3. $u(t) = \frac{V_0}{\sqrt{5}}\left[e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right]$

Ex8 : 1. $z_{eq} = H + \ell_0 - \frac{Mg}{k}$ $\quad$ 2. $\ddot{z}_G + \frac{\alpha}{M}\dot{z}_G + \frac{k}{M}z_G = \frac{k}{M}(H + \ell_0) - g$

3. $\ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = 0$ $\quad$ 4. $\alpha = 2\sqrt{kM}$ $\quad$ 5. régime pseudopériodique : $T = \frac{2\pi(m+M)}{\sqrt{km}}$

6. $k = 2,2.10^5\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$; $\alpha = 3,0.10^4\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$; $Q = 0,56$; $\tau = 0,44\,\mathrm{s}$