Chapitre 9

# DÉRIVATION

Dans tout le chapitre, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

# I Dérivabilité en un point

## 1 Dérivabilité en un point

**Définition 1** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$. On dit que $f$ est* **dérivable en** $a$ *si le rapport* $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *admet une limite finie quand $x$ tend vers $a$. Cette limite est alors appelée* **dérivée de $f$ en $a$** *(ou* **nombre dérivé de $f$ en $a$***) et est notée $f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.*

Le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé **taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $x$**.

**Remarque :** Si $a \neq 0$, on peut se ramener à une limite en 0 en posant $x = a + h$. Ainsi, $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

**Exemple :** Soit la fonction $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Dérivabilité en 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, donc $f$ n'est pas dérivable en 0.

Dérivabilité en $a \neq 0$ : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, donc $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

## 2 Dérivabilité à gauche ou à droite en un point

**Définition 2** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$. On dit que $f$ est* **dérivable à gauche** *(resp.* **à droite***)* **en** $a$ *si le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en $a$. Cette limite est alors appelée* **dérivée de $f$ à gauche** *(resp.* **à droite***)* **en** $a$ *et est notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).*

**Proposition 1** *$f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $a$ et que $f'_g(a) = f'_d(a)$.*

**Exemple :** Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.

Étudions la dérivabilité de $f$ en 0 : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$ (et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'existe pas).

La fonction $f$ est donc dérivable à gauche et à droite en 0, $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$, mais $f$ n'est pas dérivable en 0.

## 3 Dérivabilité et continuité

**Proposition 2** *Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*

**Démonstration :** $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) = f'(a) \times 0 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. $\square$

**Remarque : La réciproque est fausse**. Contre-exemples :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 (car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$), mais elle n'est pas dérivable en 0.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 (car $\displaystyle\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$), mais elle n'est pas dérivable en 0.

– La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue en 0 (car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| \leqslant |x|$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$), mais elle n'est pas dérivable en 0 car $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

# 4 Développement limité d'ordre 1

**Proposition 3** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$. Alors $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si il existe deux réels $\lambda_0, \lambda_1$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

*avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Dans ce cas, $\lambda_0 = f(a)$ et $\lambda_1 = f'(a)$.*

**Démonstration :**

Supposons que $f$ est dérivable en $a$. Posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ si $x \neq a$ et $\varepsilon(a) = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, et $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ donc $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.

Supposons que $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Alors $f(a) = \lambda_0$ et $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\lambda_1(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} (\lambda_1 + \varepsilon(x)) = \lambda_1$, donc $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \lambda_1$. $\square$

**Remarque :** Il est souvent utile d'écrire ce développement limité sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

où $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

# 5 Interprétation graphique

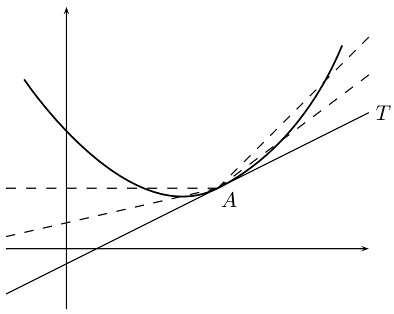
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit $a \in I$.

• Tangente

On suppose que $f$ est dérivable en $a$.

Soit $A$ le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a, f(a))$ et, pour $x \in I$, soit $M$ le point de coordonnées $(x, f(x))$. Alors le coefficient directeur de la droite $(AM)$ est $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Ainsi, lorsque $x$ tend vers $a$, le coefficient directeur de la droite $(AM)$ tend vers $f'(a)$.



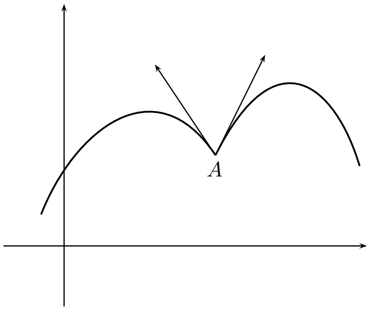

**Définition 3** *On appelle* **tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A$** *la droite passant par $A$ et de coefficient directeur $f'(a)$.*

On peut donc considérer la tangente comme la limite des droites $(AM)$ lorsque $M$ tend vers $A$, et :

**Proposition 4** *Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A$ est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.*

• Demi-tangentes

**Définition 4** *Si $f$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en $a$, alors on dit que la demi-droite passant par $A(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) est une* **demi-tangente à $\mathcal{C}$ en $A$**.

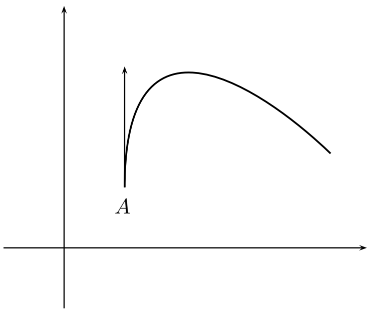



**Exemple :** A l'origine, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto |x|$ n'a pas de tangente, mais deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs 1 et $-1$.

• Tangente verticale

**Définition 5** *Si $f$ est continue en $a$ et que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}$ a une* **(demi-)tangente verticale en** *$A$.*

La limite peut aussi être en $a^+$ ou en $a^-$.




**Exemple :** La courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ a une demi-tangente verticale à l'origine car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = +\infty$.

# II Dérivabilité sur un intervalle

## 1 Définition

**Définition 6** *$f : I \to \mathbb{R}$ est* **dérivable sur** *$I$ si elle est dérivable en tout point de $I$. On appelle alors* **(fonction) dérivée de** *$f$ l'application notée $f'$ ou $\dfrac{df}{dx}$ qui, à tout $x$ de $I$, associe $f'(x)$ la dérivée de $f$ en $x$.*

**Exemple :** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

## 2 Dérivées successives

Si $f$ est dérivable sur $I$, on peut définir sa fonction dérivée $f'$. Si $f'$ est elle-même dérivable sur $I$, alors on peut définir sa fonction dérivée $(f')'$ : on l'appelle **dérivée seconde de** $f$ et on la note $f''$ ou $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Plus généralement on définit par récurrence les dérivées successives de $f$ :

- On pose $f^{(0)} = f$.
- Si $f^{(n)}$ est définie et dérivable sur $I$, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

La fonction $f^{(n)}$ est appelée **dérivée** $n^e$ **de** $f$ **sur** $I$, ou **dérivée d'ordre** $n$ **de** $f$ **sur** $I$. On peut la noter aussi $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Soit $a \in I$. On dit que $f$ est $n$ **fois dérivable en** $a$ si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ sont définies au voisinage de $a$, et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en $a$ (pour pouvoir étudier la dérivabilité d'une fonction en un point, elle doit être définie au voisinage de ce point).

## 3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

**Définition 7** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

*On dit que $f$ est* **de classe** $\mathcal{C}^0$ *sur $I$ si elle est continue sur $I$.*

*On dit que $f$ est* **de classe** $\mathcal{C}^k$ *sur $I$ ($k \in \mathbb{N}^*$) si elle est $k$ fois dérivable sur $I$ et que $f^{(k)}$ est continue sur $I$.*

*On dit que $f$ est* **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ *sur $I$ si elle est indéfiniment dérivable sur $I$.*

On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$.

Par exemple, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction dérivable et dont la dérivée est continue.

**Remarque :** Il existe des fonctions dérivables qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire dont la dérivée n'est pas continue. Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$, donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Les résultats du paragraphe suivant montrent que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$. Ainsi $f'$ n'a pas de limite en 0, et donc elle n'est pas continue en 0.

# III Opérations sur les dérivées

## 1 Addition

**Proposition 5** *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in I$.*

*(i) Si $u$ et $v$ sont dérivables en $a$, alors $u + v$ aussi, et $(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a)$.*

*(ii) Si $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$, alors $u + v$ aussi, et $(u + v)' = u' + v'$.*

*(iii) Si $u$ et $v$ sont $n$ fois dérivables en $a$, alors $u + v$ aussi, et $(u + v)^{(n)}(a) = u^{(n)}(a) + v^{(n)}(a)$.*

*(iv) Si $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$, alors $u + v$ aussi.*

**Démonstration :**
Pour (i), il suffit d'écrire que $\dfrac{(u + v)(x) - (u + v)(a)}{x - a} = \dfrac{u(x) - u(a)}{x - a} + \dfrac{v(x) - v(a)}{x - a} \to u'(a) + v'(a)$. Le (ii) est immédiat, le (iii) se démontre par récurrence. Enfin, pour le (iv), $u + v$ est $k$ fois dérivable sur $I$ et $(u + v)^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$ est continue sur $I$. □

## 2 Multiplication par un réel

**Proposition 6** *Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$. Soit $\alpha$ un réel.*

*(i) Si $u$ est dérivable en $a$, alors $\alpha u$ aussi, et $(\alpha u)'(a) = \alpha u'(a)$.*

*(ii) Si $u$ est dérivable sur $I$, alors $\alpha u$ aussi, et $(\alpha u)' = \alpha u'$.*

*(iii) Si $u$ est $n$ fois dérivable en $a$, alors $\alpha u$ aussi, et $(\alpha u)^{(n)}(a) = \alpha u^{(n)}(a)$.*

*(iv) Si $u$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$, alors $\alpha u$ aussi.*

**Démonstration :**
Pour (i), il suffit d'écrire que $\dfrac{(\alpha u)(x) - (\alpha u)(a)}{x - a} = \alpha \dfrac{u(x) - u(a)}{x - a} \to \alpha u'(a)$. Le reste s'en déduit facilement. □

## 3 Multiplication

**Proposition 7** *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in I$.*

*(i) Si $u$ et $v$ sont dérivables en $a$, alors $u \times v$ aussi, et $(u \times v)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$.*

*(ii) Si $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$, alors $u \times v$ aussi, et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.*

*(iii)* **(Formule de Leibniz)** *Si $u$ et $v$ sont $n$ fois dérivables en $a$, alors $u \times v$ aussi, et :*

$$(u \times v)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(a) v^{(k)}(a).$$

*(iv) Si $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$, alors $u \times v$ aussi.*

**Démonstration :**
Pour (i), on écrit $\dfrac{(u\times v)(x)-(u\times v)(a)}{x-a}=\dfrac{u(x)v(x)-u(a)v(x)+u(a)v(x)-u(a)v(a)}{x-a}=\dfrac{(u(x)-u(a))v(x)+u(a)(v(x)-v(a))}{x-a}$
$=\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}v(x)+u(a)\dfrac{v(x)-v(a)}{x-a}\to u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ ($v$ est continue en $a$). Le (ii) s'en déduit immédiatement.
Pour le (iii), on raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $n=1$, c'est le (i).
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons la formule vraie au rang $n$, et montrons-la au rang $n+1$.
Soient donc $u$ et $v$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables en $a$. Cela signifie que $u,u',\dots,u^{(n)}$ et $v,v',\dots,v^{(n)}$ sont définies sur un voisinage $V$ de $a$, et que $u^{(n)}$ et $v^{(n)}$ sont dérivables en $a$.
Par hypothèse de récurrence, pour tout $x\in V$, $u\times v$ est $n$ fois dérivable en $x$ et $(u\times v)^{(n)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$ : la fonction $(u\times v)^{(n)}$ est donc définie sur $V$, et elle est dérivable en $a$ puisque les fonctions $u^{(n-k)}$ et $v^{(k)}$ le sont toutes. En dérivant on obtient :

$$\begin{aligned}
(u\times v)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a)+u^{(n-k)}(a)v^{(k+1)}(a)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(a)v^{(k+1)}(a)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a)+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a) \text{ (changement d'indice dans la deuxième somme)}\\
&= \binom{n}{0}u^{(n+1)}(a)v^{(0)}(a)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a)+\binom{n}{n}u^{(0)}(a)v^{(n+1)}(a)\\
&= u^{(n+1)}(a)v^{(0)}(a)+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a)+u^{(0)}(a)v^{(n+1)}(a)\\
&= u^{(n+1)}(a)v^{(0)}(a)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a)+u^{(0)}(a)v^{(n+1)}(a) \text{ (formule de Pascal)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^{(n-k+1)}(a)v^{(k)}(a),
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
Enfin, pour le (iv), $u\times v$ est $k$ fois dérivable sur $I$ et $(u\times v)^{(k)}=\displaystyle\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{(k-p)}v^{(p)}$ est continue sur $I$ car les $u^{(k-p)}$ et les $v^{(p)}$ le sont. □

**Exercice 1** Calculer la dérivée $n^e$ de la fonction $x\mapsto xe^x$.

# 4 Inverse, quotient

**Proposition 8** *Soient $u,v:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a\in I$.*

*(i) Si $u$ est dérivable en $a$ et que $u(a)\neq 0$, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable en $a$, et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(a)=-\dfrac{u'(a)}{u^2(a)}$.*

*(ii) Si $u$ et $v$ sont dérivables en $a$ et que $v(a)\neq 0$, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en $a$, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(a)=\dfrac{u'(a)v(a)-u(a)v'(a)}{v^2(a)}$.*

*(iii) Si $u$ est dérivable sur $I$ et qu'elle ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $I$, et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$.*

*(iv) Si $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$ et que $v$ ne s'annule pas, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $I$, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.*

*(v) Si $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et que $v$ ne s'annule pas, alors $\dfrac{u}{v}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$.*

**Démonstration :**
(i) $u$ est continue en $a$ et $u(a)\neq 0$ donc $u(x)\neq 0$ au voisinage de $a$, et $\dfrac{\frac{1}{u(x)}-\frac{1}{u(a)}}{x-a}=\dfrac{u(a)-u(x)}{(x-a)u(x)u(a)}=-\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}\dfrac{1}{u(x)u(a)}\to-\dfrac{u'(a)}{u^2(a)}$.
(ii) On écrit que $\dfrac{u}{v}=u\times\dfrac{1}{v}$ et on applique le (i) et la formule de dérivation d'un produit.
(v) On raisonne par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$. Pour $k=0$, c'est un résultat sur les fonctions continues.
Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang $k$, et montrons-la au rang $k+1$.
Soient donc $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Alors $u'v-uv'$ et $v^2$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, donc par hypothèse de récurrence $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ aussi, et par conséquent $\dfrac{u}{v}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui achève la récurrence. □

## 5 Composition

**Proposition 9** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.*

*(i) Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et que $g$ est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en $a$, et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.*

*(ii) Si $f$ est dérivable sur $I$ et que $g$ est dérivable sur $J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $I$, et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.*

*(iii) Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et que $g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$.*

**Démonstration :**
(i) On va utiliser les développements limités d'ordre 1 (proposition 3).
La fonction $f$ est dérivable en $a$, donc il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ pour tout $x \in I$, avec $\varepsilon(x) \overset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
De même, $g$ est dérivable en $f(a)$, donc il existe une fonction $\eta : J \to \mathbb{R}$ telle que $g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + (y - f(a))\eta(y)$ pour tout $y \in J$, avec $\eta(y) \overset{y\to f(a)}{\longrightarrow} 0$.
Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\eta(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)) + (f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x))\eta(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + (x-a)\zeta(x), \end{aligned}$$

où $\zeta(x) = g'(f(a))\varepsilon(x) + (f'(a) + \varepsilon(x))\eta(f(x)) \overset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $g \circ f$ est dérivable en $a$ et que $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.
(iii) On raisonne par récurrence. Pour $k = 0$, c'est un résultat sur les fonctions continues.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang $k$, et montrons-la au rang $k+1$.
Soient donc $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Alors $f'$, $g$ et $g'$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, donc par hypothèse de récurrence $f' \circ g$ aussi, et $(f' \circ g) \times g'$ également. Par conséquent $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui achève la récurrence. □

## 6 Application réciproque

**Proposition 10** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur $I$ ($f$ définit donc une bijection de $I$ sur $f(I)$).*

*(i) Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et que $f'(a) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$, et $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*

*(ii) Si $f$ est dérivable sur $I$ et que $f'$ ne s'annule pas sur $I$, alors $f^{-1}$ est dérivable sur $f(I)$, et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

*(iii) Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et que $f'$ ne s'annule pas sur $I$, alors $f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $f(I)$.*

**Démonstration :**
Montrons (i). Pour tout $y \neq f(a)$ on peut écrire $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}}$ (car $f^{-1}(y) \neq a$).
En posant $x = f^{-1}(y)$, on a $\displaystyle\lim_{y\to f(a)} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, d'où le résultat.
Le (ii) se déduit immédiatement du (i), et pour le (iii) on raisonne par récurrence. Pour $k = 0$, c'est un résultat sur les fonctions continues.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ et que $f'$ ne s'annule pas. Alors $f^{-1}$ est dérivable et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Or $f'$ et $f^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, donc $f' \circ f^{-1}$ aussi et donc $(f^{-1})'$ également. Ainsi $f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui achève la récurrence. □

## 7 Dérivées usuelles

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $]0, +\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ |
| $\cot x$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{th} x$ | $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$ | $\mathbb{R}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{Arcsin} x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1,1[$ |
| $\operatorname{Arccos} x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1,1[$ |
| $\operatorname{Arctan} x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ |

# IV Applications de la dérivation

## 1 Extremum local d'une fonction

**Définition 8** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$.*

*On dit que $f$ admet un* **maximum local** *en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in V$.*

*On dit que $f$ admet un* **minimum local** *en $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in V$.*

**Proposition 11** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a$ un point de $I$ qui n'est pas une extrémité de $I$. Si $f$ est dérivable en $a$ et qu'elle y admet un extremum local, alors $f'(a) = 0$.*

**Démonstration :**

Supposons que $f$ admet un maximum local en $a$ (le raisonnement est analogue pour un minimum). Il existe donc un voisinage $V$ de $a$ dans $I$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in V$.

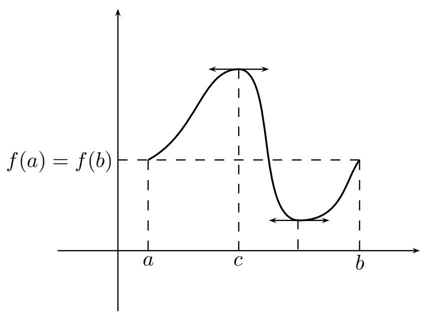
Soit $x \in V$. Si $x < a$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Or $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, donc $f'(a) \geqslant 0$. De même, si $x > a$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$ et $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, donc $f'(a) \leqslant 0$. Par conséquent $f'(a) = 0$. □

**Remarque : La réciproque est fausse.** Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ n'a pas d'extremum local en 0 bien que sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule en ce point.

## 2 Théorème de Rolle

**Théorème 12** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est continue sur $[a,b]$, qu'elle est dérivable sur $]a,b[$ et que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Interprétation graphique : Il existe $c \in ]a,b[$ tel que la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $c$ est horizontale.



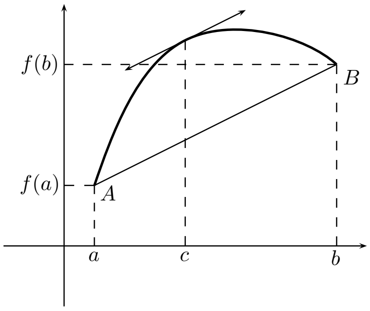

**Démonstration :**

$f$ est continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes : il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que $f(c_1) = \sup\limits_{[a,b]} f$ et $f(c_2) = \inf\limits_{[a,b]} f$.

Si $c_1$ ou $c_2 \in ]a,b[$, alors $f'$ s'annule en ce point d'après la proposition précédente. Sinon, puisque $f(a) = f(b)$, c'est que la fonction $f$ est constante, et donc $f'$ est nulle. □

## 3 Théorème des accroissements finis

**Théorème 13** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est continue sur $[a,b]$ et qu'elle est dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*




Interprétation graphique : Soient $A$ et $B$ les points de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Le coefficient directeur de la droite $(AB)$ est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Il existe donc $c \in ]a, b[$ tel que la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $c$ est parallèle à la droite $(AB)$.

**Démonstration :**

L'idée est d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction qui représente l'écart entre la droite $(AB)$ et la courbe.

Soit $M(x, y)$ un point de $(AB)$. L'égalité $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ donne $\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, soit $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

On pose donc $g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)$. La fonction $g$ est, comme $f$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et on a $g(a) = g(b) = 0$.

Par le théorème de Rolle, il existe donc $c \in ]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, donc $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

## 4 Inégalité des accroissements finis

Première version :

**Théorème 14** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est continue sur $[a, b]$, qu'elle est dérivable sur $]a, b[$ et qu'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in ]a, b[$, alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.*

**Démonstration :**

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Par conséquent $m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$, d'où le résultat. □

**Exercice 2** Montrer que : $\forall\, x \in ]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{x + 1} \leqslant \ln(x + 1) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Deuxième version :

**Théorème 15** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe un réel positif $M$ tel que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.*

**Démonstration :**

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]a, b[$ (ou $]b, a[$) tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Par conséquent $\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant M$, d'où le résultat. □

**Remarque :** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ pour tous $x, y \in I$ est dite $M-$**lipschitzienne**.

**Exercice 3** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 0$ et telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \dfrac{u_n^2}{4}$.

1) a) Étudier et représenter la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{4}$.

b) Montrer que $f$ a deux points fixes, que l'on notera $\alpha$ et $\beta$ (avec $\alpha > 0$).

c) Représenter les premiers termes de la suite $(u_n)$ à l'aide de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$. Que peut-on conjecturer ?

2) a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

b) Montrer que : $\forall\, x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

d) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$, et conclure.

## 5 Théorème de limite de la dérivée

**Théorème 16** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ (où $a \in I$). Si $f'$ admet une limite $\ell$ (finie ou infinie) en $a$, alors* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \ell$.

**Démonstration :**
Soit $x \in I$ avec $x > a$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un $c \in ]a, x[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Pour tout $x > a$ de $I$ on choisit un tel $c$, que l'on note $c(x)$. On a $a < c(x) < x$, donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to a} c(x) = a$.
Par conséquent $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^+} f'(c(x)) = \ell$ (limite d'une composée).
En raisonnant de manière analogue on montre que $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, et on peut conclure. □

**Corollaire 17** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ (où $a \in I$). Si $f'$ admet une limite finie en $a$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.*

**Démonstration :** D'après le théorème précédent, $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$, donc $f'$ est continue en $a$. □

**Exercice 4** Montrer que la fonction $f$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

## 6 Sens de variation d'une fonction dérivable

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $J$ l'intervalle obtenu en enlevant les bornes de $I$ (par exemple, si $I = [2, 3[$ alors $J = ]2, 3[$).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Il est clair que :

(i) $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si, pour tous $x, y \in I$ (avec $x \neq y$), $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.

(ii) $f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si, pour tous $x, y \in I$ (avec $x \neq y$), $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant 0$.

La dérivée étant la limite du taux d'accroissement, on en déduit :

**Théorème 18** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $J$. Alors :*
*(i) $f$ est constante sur $I$ si et seulement si, pour tout $x \in J$, $f'(x) = 0$.*
*(ii) $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si, pour tout $x \in J$, $f'(x) \geqslant 0$.*
*(iii) $f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si, pour tout $x \in J$, $f'(x) \leqslant 0$.*

**Démonstration :**
($\Rightarrow$) (i) Soit $a \in J$. Alors pour tout $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \overset{x \to a}{\to} 0 = f'(a)$.
(ii) Soit $a \in J$. Alors pour tout $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \geqslant 0$.
(iii) Soit $a \in J$. Alors pour tout $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$ donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \leqslant 0$.
($\Leftarrow$) Soient $x, y \in I$. $f$ est continue sur $[x, y]$ (ou $[y, x]$) et dérivable sur $]x, y[$, donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]x, y[$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
(i) Si $f'(c) = 0$ alors $f(x) = f(y)$, (ii) si $f'(c) \geqslant 0$ alors $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$ et (iii) si $f'(c) \leqslant 0$ alors $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant 0$, et le résultat s'ensuit. □

**Proposition 19** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $J$. $f$ est strictement croissante sur $I$ si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur $J$ et que $f'$ ne s'annule sur aucun intervalle $]a, b[ \subset J$.*

En particulier, si $f' \geqslant 0$ sur $J$ et qu'elle ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.

Le fait que $f$ est strictement croissante sur $I$ n'implique pas que l'on ait $f' > 0$. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien que sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0.

# V Fonctions convexes

Un résultat préliminaire important :

**Proposition 20** *Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $x \leqslant y$. Alors*

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0,1]\}.$$

**Démonstration :**

On raisonne par double inclusion.

Soit $t \in [x, y]$. On voit que $t = (1-\lambda)x + \lambda y$ si et seulement $\lambda = \dfrac{t-x}{y-x}$ qui est bien dans $[0,1]$ car $0 \leqslant t - x \leqslant y - x$.

Soit $\lambda \in [0,1]$. On a $(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y-x)$. Or $0 \leqslant \lambda(y-x) \leqslant y - x$ donc $x \leqslant x + \lambda(y-x) \leqslant y$ et donc $(1-\lambda)x + \lambda y \in [x, y]$. □

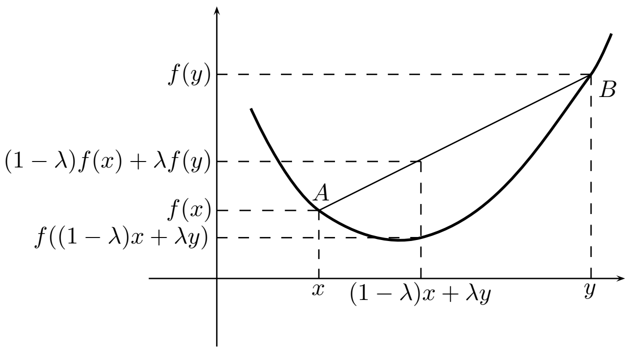
## 1 Définition

**Définition 9** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est* **convexe** *si :*

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

*On dit que $f$ est* **concave** *si $-f$ est convexe.*

Interprétation géométrique :



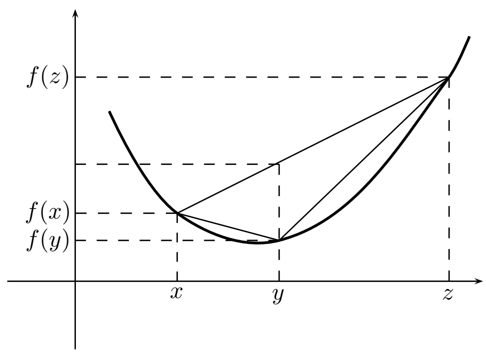

Entre les points $A$ et $B$ la courbe de $f$ est en-dessous de la sécante $(AB)$ (on montre facilement que le point de $(AB)$ d'abscisse $(1-\lambda)x + \lambda y$ a pour ordonnée $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$).

## 2 Propriétés et caractérisation

**Proposition 21** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$ on a*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Cet encadrement, appelé **l'inégalité des pentes**, se retrouve facilement sur la figure suivante.




**Démonstration :**

En prenant $\lambda = \dfrac{y-x}{z-x}$ (qui est bien dans $[0,1]$) on a

$$(1-\lambda)x + \lambda z = x + \lambda(z-x) = x + y - x = y$$

donc l'inégalité $f((1-\lambda)x+\lambda z) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(z)$ donne

$$f(y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(z).$$

On en déduit, d'une part, que

$$f(y)-f(x) \leqslant \lambda(f(z)-f(x))$$

qui donne

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

en remplaçant $\lambda$ par sa valeur, et d'autre part que

$$f(y)-f(z) \leqslant (1-\lambda)(f(x)-f(z))$$

qui donne

$$\frac{f(y)-f(z)}{z-y} \leqslant \frac{f(x)-f(z)}{z-x}$$

car $1-\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$. En multipliant par $-1$ on obtient la deuxième inégalité voulue. $\square$

**Proposition 22** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$. Alors $f$ est convexe si et seulement si $f'$ est croissante.*

**Démonstration :**
($\Rightarrow$) Supposons que $f$ est convexe. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Alors pour tout $t \in ]x,y[$ on a

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$$

d'après le théorème précédent. En faisant tendre $t$ vers $x$ dans la première inégalité et vers $y$ dans la seconde on obtient

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$$

donc $f'(x) \leqslant f'(y)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $f'$ est croissante. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$ et soit $\lambda \in [0,1]$. On veut montrer que $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.

Si $\lambda = 0$ ou $1$ ou si $x = y$ c'est immédiat. Sinon posons $t = (1-\lambda)x+\lambda y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in ]x,t[$ et $c_2 \in ]t,y[$ tels que

$$f'(c_1) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \quad \text{et} \quad f'(c_2) = \frac{f(y)-f(t)}{y-t}.$$

Puisque $f'$ est croissante on a $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ et donc

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{y-t}.$$

Or $t-x = \lambda(y-x)$ et $y-t = (1-\lambda)(y-x)$ donc

$$\frac{f(t)-f(x)}{\lambda(y-x)} \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{(1-\lambda)(y-x)}$$

d'où

$$(1-\lambda)(f(t)-f(x)) \leqslant \lambda(f(y)-f(t))$$

qui donne

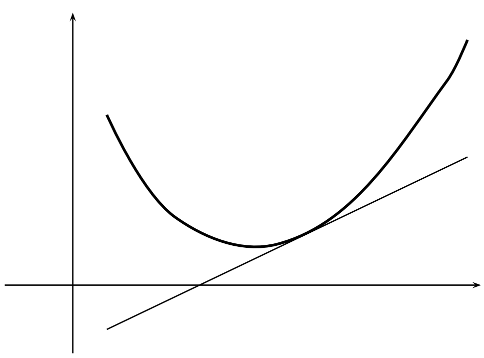
$$f(t) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

La fonction $f$ est convexe. $\square$

**Corollaire 23** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors $f$ est convexe si et seulement si $f''$ est positive.*

C'est généralement la manière la plus simple de montrer qu'une fonction est convexe.

**Proposition 24** *La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes.*



Autrement dit, si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors pour tout $a \in I$ on a :

$$\forall x \in I, f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a).$$

**Démonstration :**

Soit $a \in I$. Soit $x \in I$ avec $x > a$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]a, x[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Or $f'$ est croissante, donc $f'(c) \geqslant f'(a)$ d'où $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant f'(a)$ qui donne le résultat.

Si $x < a$ on raisonne de manière analogue. □

## 3 Exemples d'inégalités de convexité

On peut établir à l'aide de la convexité de nombreuses inégalités, en particulier en utilisant la proposition précédente.

**Exercice 5** Montrer que :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.

2) $\forall x \in ]-1, +\infty[\,, \ln(1+x) \leqslant x$.

3) $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

La proposition suivante est appelée **inégalité de Jensen**.

**Proposition 25** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ et soient $x_1, \ldots, x_n \in I$. Alors*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Si la fonction est concave, l'inégalité est renversée.

**Démonstration :**

On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$ c'est immédiat : on a $\lambda_1 = 1$ donc $f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le théorème vrai au rang $n$ et démontrons-le au rang $n+1$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ des réels positifs tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$ et soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$. Si $\lambda_{n+1} = 1$ les autres $\lambda_i$ sont nuls et le résultat est immédiat. Sinon :

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) &= f\left((1-\lambda_{n+1})\frac{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leqslant (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leqslant (1-\lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

La première majoration vient de la convexité de $f$ et la deuxième de l'hypothèse de récurrence avec $\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$. □

Par exemple la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ (car sa dérivée seconde $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est négative) donc, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in ]0, +\infty[$ et pour tous réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, on a

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \geqslant \lambda_1 \ln(x_1) + \ldots + \lambda_n \ln(x_n) = \ln\left(x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}\right)$$

et donc par croissance de ln :

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \geqslant x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

En particulier en prenant $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ on obtient **l'inégalité arithmético-géométrique** :

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

# VI Extension aux fonctions à valeurs complexes

## 1 Définitions

**Définition 10** *$f : I \to \mathbb{C}$ est* **dérivable en** *$a \in I$ si le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en $a$. Cette limite est appelée* **dérivée de** *$f$* **en** *$a$ et est notée $f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.*

On peut définir également les notions de dérivées à gauche et à droite en $a$.

**Définition 11** *$f : I \to \mathbb{C}$ est* **dérivable sur** *$I$ si elle est dérivable en tout point de $I$. On peut alors définir sur $I$ la* **fonction dérivée** *de $f$ : $f' : x \mapsto f'(x)$.*

On peut également définir les dérivées successives d'une fonction à valeurs complexes.

**Définition 12**
*On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est* **de classe** *$\mathcal{C}^0$ sur $I$ si elle est continue sur $I$.*

*On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est* **de classe** *$\mathcal{C}^k$ sur $I$ ($k \in \mathbb{N}^*$) si elle est $k$ fois dérivable sur $I$ et que $f^{(k)}$ est continue sur $I$.*

*On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est* **de classe** *$\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ si elle est indéfiniment dérivable sur $I$.*

On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ à valeurs complexes.

## 2 Propriétés

**Proposition 26** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.*

*(i) $f$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. Alors $f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a)$.*

*(ii) $f$ est dérivable sur $I$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. Alors $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$.*

On montre ainsi facilement que les propriétés concernant les opérations sur les dérivées restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes (y compris la formule de Leibniz).

Les propriétés liant le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction n'ont plus de sens dans $\mathbb{C}$. Cependant le résultat suivant reste valable :

**Proposition 27** *$f : I \to \mathbb{C}$ est constante sur $I$ si et seulement si elle est dérivable sur $I$ et que $f' = 0$.*

Le théorème de Rolle n'est plus vrai (et donc le théorème des accroissements finis non plus). Par exemple, la fonction $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{ix}$ est dérivable sur $[0, 2\pi]$ et $f(0) = f(2\pi)$, mais $f'(x) = ie^{ix}$ ne s'annule pas.

En revanche, l'inégalité des accroissements finis reste valable (on l'admet pour l'instant) :

**Théorème 28** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe un réel positif $M$ tel que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.*