

TD11 : Mouvements dans les champs \vec{E} et \vec{B} - corrigé

Application 1

1. La particule est soumise à la force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E} = qE\vec{u}_y$. Elle est déviée vers le point A à condition que \vec{F}_e soit dirigée selon $-\vec{u}_y$. On en déduit qu'il faut que q et E soient de signe opposés :

$$\boxed{qE < 0}$$

2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = q\vec{E}$. On projette dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ qE \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{qE}{m} \end{cases}$$

On intègre avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$, $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha$ et on obtient :

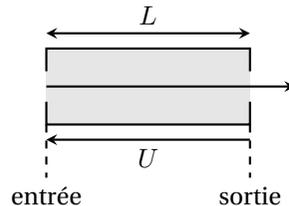
$$\boxed{x(t) = v_0 \cos(\alpha)t} \text{ et } \boxed{y(t) = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0 \sin(\alpha)t}$$

3. On cherche la date $t \neq 0$ à laquelle la coordonnée y s'annule : $t_A = -\frac{2mv_0 \sin \alpha}{qE}$. On en déduit la position du point A :

$$\boxed{x_A = x(t_A) = -\frac{mv_0^2 \sin(2\alpha)}{qE}}$$

Application 2

On note L la taille de l'accélérateur linéaire, U la tension accélératrice et v_s la vitesse de sortie. Les protons ont une charge positive e . Le travail de la force électrique entre l'entrée et la sortie de l'accélérateur vaut $W(\vec{F}_e) = eU$. On applique le théorème de l'énergie cinétique à un proton dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_s^2 = eU$.



La tension accélératrice est reliée au champ électrique E en norme par : $E = U/L$. On en déduit l'expression de la taille L de l'accélérateur en fonction de la vitesse de sortie : $L = \frac{mv_s^2}{2eE}$. La longueur minimale est obtenue quand le champ électrique est maximal :

$$\boxed{L_{\min} = \frac{mv_s^2}{2eE_{\max}} = 1,2 \text{ m}}$$

Application 3

1. La particule est soumise à la force électromagnétique résultante $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. On projette le PFD dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} \\ m \frac{dv_y}{dt} \\ m \frac{dv_z}{dt} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ qE \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y & (E_x) \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x + \frac{qE}{m} & (E_y) \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 & (E_z) \end{cases}$$

On intègre deux fois l'équation (E_z) avec les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{z(t) = 0}$$

2. On dérive l'équation (E_x) puis on utilise l'équation (E_y) :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x + \frac{q^2EB}{m^2} \iff \boxed{\frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = \frac{q^2EB}{m^2}}$$

De la même manière, en dérivant l'équation (E_y) on obtient :

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{qB}{m} \frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \iff \boxed{\frac{d^2v_y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = 0}$$

$v_x(t)$ et $v_y(t)$ effectuent des oscillations harmoniques de pulsation propre : $\omega_0 = \left| \frac{qB}{m} \right|$.

3. Les solutions générales de ces équations sont : $v_x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) + \frac{E}{B}$ et $v_y(t) = A_2 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t)$. On a trouvé la solution particulière de l'équation vérifiée par $v_x(t)$ en résolvant l'équation sans dérivée. Sans même déterminer les constantes d'intégration on note que $\langle \cos(\omega_0 t) \rangle = \langle \sin(\omega_0 t) \rangle = 0$ donc $\boxed{\langle v_x(t) \rangle = E/B}$ et $\boxed{\langle v_y(t) \rangle = 0}$. On en déduit qu'au cours du

temps la particule dérive le long de l'axe (Ox) avec la vitesse : $\boxed{\vec{v}_D = \frac{E}{B} \vec{u}_x}$.

4. On détermine A_1 et B_1 avec les conditions initiales $v_x(0) = 0$ et $\frac{dv_x}{dt}(0) = \frac{qB}{m}v_y(0) = 0$. On obtient : $v_x(t) = v_D(1 - \cos(\omega_0 t))$. On intègre à nouveau cette équation, avec la condition initiale $x(0) = 0$: $x(t) = v_D t - R \sin(\omega_0 t)$.

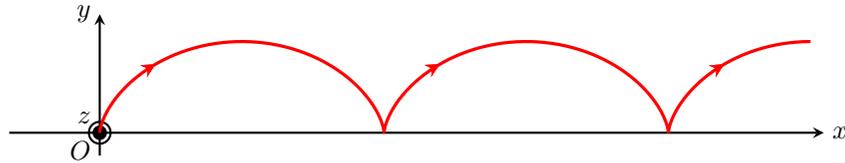
On détermine A_1 et B_1 avec les conditions initiales $v_y(0) = 0$ et $\frac{dv_y}{dt}(0) = -\frac{qB}{m}v_x(0) + \frac{qE}{m} = \frac{qE}{m}$. On obtient : $v_y(t) = v_D \sin(\omega_0 t)$. On intègre à nouveau cette équation, avec la condition initiale $y(0) = 0$: $y(t) = R(1 - \cos(\omega_0 t))$.

Enfin, en remplaçant t par $\frac{\xi}{\omega_0} = \frac{R}{v_D} \xi$ on aboutit aux équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\xi) = R(\xi - \sin \xi) \\ y(\xi) = R(1 - \cos \xi) \end{cases}$$

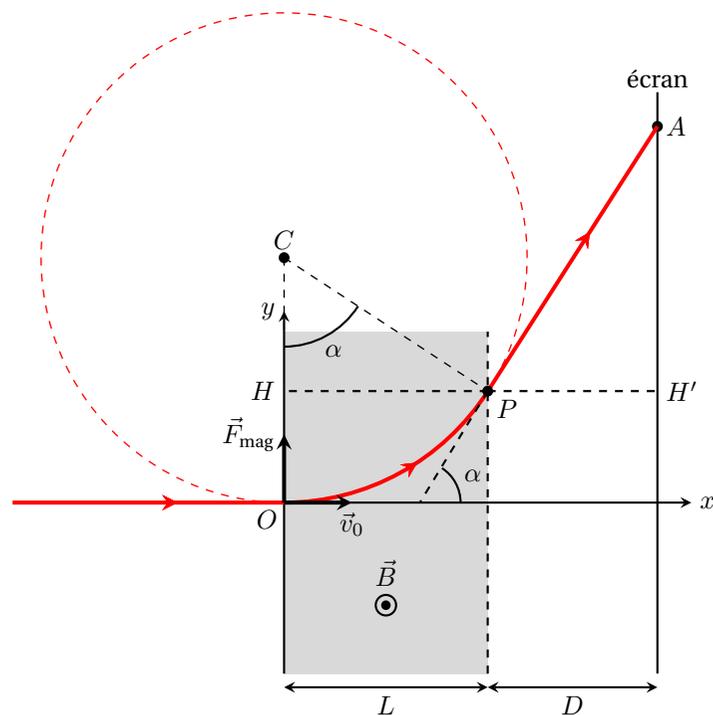
Remarque : On représente ci-dessous l'allure de la trajectoire. Cette courbe porte le nom de **cycloïde**.

TD11 : Mouvements dans les champs \vec{E} et \vec{B} - corrigé



Application 4

1. Puisqu'on néglige leur poids les électrons ont un mouvement **circulaire uniforme** dans le champ magnétique et un mouvement **rectiligne uniforme** dans le vide qui sépare la zone de déflexion de l'écran. La trajectoire des électrons qui atteignent le point A a donc l'allure ci-dessous. On a représenté en ligne traitillée le cercle de centre C qui se confond avec la trajectoire entre O et P.



Pour atteindre A les électrons doivent être déviés vers les y croissants. Cela signifie qu'au point O la force magnétique (qui est toujours dirigée vers le centre de courbure, voir sur le schéma) doit être orientée selon $+\vec{u}_y$. Or la force magnétique qui s'exerce sur les électrons au point O vaut : $\vec{F}_m = -e\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$. Les électrons sont de charge négative donc $\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ doit être selon $-\vec{u}_y$. On utilise la règle de la main droite pour conclure quant au sens du champ magnétique : **il doit être orienté selon $+\vec{u}_z$** ($B > 0$).

2. L'angle de déviation α mesure l'écart entre les directions d'entrée et de sortie des électrons. Pour déterminer sa valeur on se sert du triangle CHP rectangle en H. En effet dans ce triangle : $\sin \alpha = \frac{HP}{CP} = \frac{L}{R}$ avec $R = \frac{mv_0}{eB}$ le rayon de la trajectoire circulaire. On conclut : $\sin \alpha = \frac{eBL}{mv_0}$.

Le déplacement selon (Oy) à la sortie du champ magnétique vaut :

$$y_s = OH = OC - HC = R(1 - \cos \alpha) \iff y_s = \frac{mv_0}{eB}(1 - \cos \alpha)$$

3. Dans l'approximation des petits angles $\sin \alpha \simeq \alpha = \frac{eBL}{mv_0}$ et $y_s \simeq 0$. On cherche l'expression de B qui permet aux électrons d'atteindre le point d'ordonnée y_A sur l'écran. Dans le triangle rectangle $PH'A$ on a :

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{H'A}{H'P} \simeq \frac{y_A}{D} = \frac{eBL}{mv_0} \iff B = \frac{mv_0 y_A}{eLD}$$

4. L'application numérique donne : $B = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

★ Exercice 1 : Accélération d'une particule chargée

1. On exploite la conservation de l'énergie mécanique de la particule, entre les points O et A :

$$E(O) = E(A) \iff 0 = \frac{1}{2}mv^2 + qV_A \iff v = \sqrt{-\frac{2qV_A}{m}}$$

La vitesse n'est définie qu'à condition que $qV_A < 0$. **q et V_A doivent être nécessairement de signes opposés.**

2. On utilise la relation $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$, que l'on intègre entre les points O et A :

$$V(A) - V(O) = -\int_O^A E \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = -E(x(A) - x(O)) \iff V_A = -EL$$

Le champ électrique s'écrit sous la forme $\vec{E} = -\frac{V_A}{L}\vec{u}_x$.

On applique le PFD à la particule dans le référentiel terrestre supposé galiléen, projeté sur \vec{u}_x (on néglige le poids, comme on l'a justifié en cours) :

$$m\ddot{x} = qE = -\frac{qV_A}{L} \iff \ddot{x} = -\frac{qV_A}{mL}$$

On intègre deux fois cette équation, avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$, pour obtenir la position à tout instant :

$$x(t) = -\frac{qV_A}{2mL}t^2$$

La particule atteint le point A ($x = L$), à la date : $\tau = \sqrt{-\frac{2mL^2}{qV_A}}$.

3. a) $v = 5,96 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\tau = 1,69 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

b) $v = 1,20 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\tau = 8,32 \cdot 10^{-7} \text{ s}$.

TD11 : Mouvements dans les champs \vec{E} et \vec{B} - corrigé

★ Exercice 2 : Cyclotron de Lawrence

La vitesse maximale des protons se déduit immédiatement de leur énergie cinétique finale :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dans un accélérateur linéaire, la tension nécessaire pour obtenir une telle énergie cinétique serait la suivante :

$$U = \frac{E_c}{e} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ V}$$

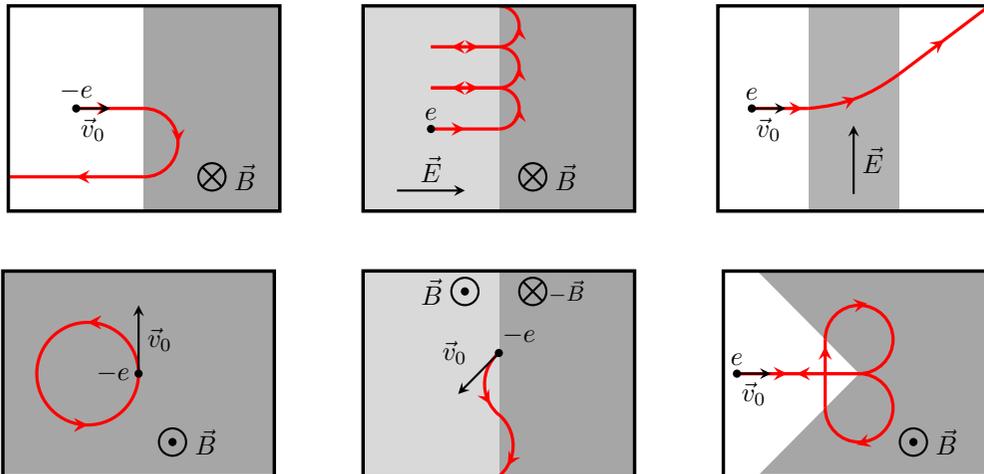
On imagine que la vitesse maximale des particules est atteinte lorsque le rayon de leur trajectoire est de l'ordre du rayon du cyclotron, soit environ 14 cm. La relation entre la vitesse maximale et le rayon du cyclotron est la suivante :

$$R = \frac{mv_{\max}}{eB} \iff B = \frac{mv_{\max}}{eR} = 1,1 \text{ T}$$

La fréquence du champ accélérateur doit être égale à la fréquence cyclotron, soit :

$$f = \frac{eB}{2\pi m} = 17 \text{ MHz}$$

★ Exercice 3 : Mouvements dans des champ \vec{E} et \vec{B}



★ Exercice 4 : Spectrographe de Bainbridge

1. Notons A le point d'entrée des ions dans la chambre d'accélération (vitesse nulle) et B le point d'entrée dans la chambre de déviation (vitesse v). Par conservation de l'énergie mécanique dans la chambre d'accélération :

$$eV_A = eV_B + \frac{1}{2}mv^2 \iff v = \sqrt{\frac{2e(V_A - V_B)}{m}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Pour que les ions soient accélérés vers B et donc que la vitesse v soit définie, il faut imposer $U > 0$.

2. Les ions qui entrent dans la chambre de déviation sont soumis à la force magnétique $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Pour que cette force soit dirigée "vers le bas", il faut que le champ magnétique "viene vers nous".

3. Chaque isotope suit une trajectoire circulaire dans la chambre de déviation (on note respectivement R_{39} et R_{41} le rayon pour l'isotope 39 et 41). La distance qui sépare les traces des deux isotopes sur la plaque est égale à la différence entre les deux diamètres : $d = 2|R_{41} - R_{39}|$.

Le rayon de chaque trajectoire suit la relation classique : $R = \frac{mv}{eB}$, où v est la vitesse de la particule, exprimée à la question 1. La relation entre le rayon du mouvement circulaire et la masse de l'isotope est donc la suivante :

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}} \iff d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U}{e}} (\sqrt{m_{41}} - \sqrt{m_{39}}) = 4,6 \text{ cm}$$

où $m_{41} = 41m_p$ et $m_{39} = 39m_p$ sont les masses des ions $^{41}\text{K}^+$ et $^{39}\text{K}^+$.

★ Exercice 5 : Filtre de vitesse

1. Les ions sont chargés positivement. Pour que la force électrique $\vec{F} = 2e\vec{E}$ soit dirigée suivant $+\vec{u}_x$, il faut imposer $E_0 > 0$.

2. En appliquant le TEC aux ions, on obtient la relation classique : $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$, avec ici $q = 2e$. Les masses de l'isotope 200 et de l'isotope 202 valent respectivement $m_{200} = 200m$ et $m_{202} = 202m$.

$$v_{01} = \sqrt{\frac{4eU}{200m}} = 1,383 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_{02} = \sqrt{\frac{4eU}{202m}} = 1,377 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. À l'entrée du filtre de vitesse, les ions sont soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = 2eE_1\vec{u}_y + 2ev\vec{u}_x \wedge B_1\vec{u}_z = 2e(E_1 - vB_1)\vec{u}_y$$

Le mouvement des ions est rectiligne (et uniforme) dans le filtre de vitesse si la force résultante est nulle, c'est-à-dire si : $E_1 = vB_1$.

4. Pour que seul l'isotope 200 sorte du filtre, il faut imposer un champ électrique :

$$E_1 = v_{01}B_1 = 5,299 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Pour que seul l'isotope 202 sorte du filtre, il faut imposer un champ électrique :

$$E_1 = v_{02}B_1 = 5,272 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

TD11 : Mouvements dans les champs \vec{E} et \vec{B} - corrigé

★★ Exercice 6 : Mouvement dans des champs \vec{E} et \vec{B} orthogonaux

Voir application 3.

★★ Exercice 7 : Expérience de Millikan

1. Les électrons sont chargés négativement donc ils sont attirés par les potentiels les plus élevés et **repoussés par les potentiels les plus faibles**. Pour que l'anode repousse les photoélectrons il faut que son potentiel électrique soit plus faible que celui de la cathode ; **le potentiel V_0 doit être négatif**.

2. On observe un courant dans le circuit à partir du moment où les photoélectrons les plus rapides arrivent à traverser l'isolant situé entre les deux plaques. Si l'on se place au potentiel d'arrêt alors les photoélectrons éjectés de la cathode avec l'énergie cinétique $e_{c,\max}$ arrivent **tout juste** à atteindre l'anode, c'est-à-dire qu'ils y arrivent **avec une vitesse nulle**.

On suppose qu'un photoélectron n'est soumis qu'à la force électrique exercée par le champ \vec{E} existant entre les électrodes. Cette force est conservative car le champ \vec{E} est stationnaire. On en déduit que **l'énergie mécanique d'un photoélectron se conserve** au cours de son voyage entre les électrodes. On note C le point de départ d'un photoélectron à la cathode et A son point d'arrivée à l'anode :

$$E(C) = E(A)$$

On s'intéresse aux électrons les plus rapides, ceux qui ont une énergie cinétique $E_c(C) = e_{c,\max}$ en quittant la cathode. Le potentiel y est nul donc $E_p(C) = 0$.

On vient de voir que lorsque le potentiel de l'anode est égal au potentiel d'arrêt ($E_p(A) = -eV_{0,\lim}$), les photoélectrons les plus rapides l'atteignent tout juste, avec une vitesse nulle ($E_c(A) = 0$).

La conservation de l'énergie mécanique conduit donc à :

$$e_{c,\max} = -eV_{0,\min}$$

3. Si l'hypothèse d'Einstein est correcte alors la relation entre le potentiel d'arrêt et la fréquence de l'onde lumineuse prend la forme suivante :

$$h\nu - W = -eV_{0,\lim} \iff V_{0,\lim} = -\frac{h}{e}\nu + \frac{W}{e}$$

En passant à la valeur absolue on obtient alors :

$$|V_{0,\lim}| = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$

Le potentiel d'arrêt devrait, selon l'hypothèse d'Einstein, varier **de façon affine** avec la fréquence de l'onde lumineuse. **C'est compatible avec les résultats de l'expérience de Millikan** puisque, aux incertitudes près pour lesquelles on n'a pas d'information, les points expérimentaux semblent alignés.

Le coefficient directeur du graphe s'identifie à h/e . On mesure sa valeur :

$$a = 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{Hz}^{-1} \implies h = ae = 6,5 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Remarque : Millikan a proposé $h = 6,57 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, soit un écart inférieur à 1% en comparaison de la valeur actuellement admise : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$!

On remarque que l'effet photoélectrique ne se produit que pour une fréquence suffisamment élevée. La plus petite fréquence qui produit un effet photoélectrique s'appelle *fréquence seuil*, elle correspond à $|V_{0,\lim}| = 0$. La lecture de la fréquence seuil ν_s permet d'accéder au travail d'extraction. En effet :

$$|V_{0,\lim}| = 0 = \frac{h}{e}\nu_s - \frac{W}{e} \iff W = h\nu_s$$

On lit sur la graphe $\nu_s = 43,9 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$. Avec la valeur de la constante de Planck que nous avons obtenu grâce au coefficient directeur on trouve que :

$$W = 2,9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,8 \text{ eV}$$