Corrigé DM11

Exercice : Masse lancée sur un ressort

1. On étudie le mouvement du solide dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $\vec{P}$, à la force de rappel du ressort $\vec{F}$ (une fois le contact établi) et à la réaction normale $\vec{N}$ du plan (pas de frottement). Le poids et la force de rappel sont conservatives. La réaction normale ne travaille pas car elle est à tout instant orthogonale au déplacement. On en déduit, d'après le théorème de la puissance mécanique, que **l'énergie mécanique du solide se conserve au cours du mouvement** :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\vec{N}) = 0 \implies E = \mathrm{Cste}$$

L'énergie potentielle du solide vaut : $E_p = mgz + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$, avec ℓ la longueur du ressort. On effectue un bilan d'énergie mécanique entre le point de départ du solide, noté A (altitude H, ressort de longueur ℓ_0, vitesse nulle) et le point O (altitude nulle, ressort de longueur nulle, vitesse v inconnue).

$$E(A) = E(O) \iff mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\ell_0^2 \iff \boxed{v = \sqrt{2gH - \frac{k\ell_0^2}{m}}}$$

Cette vitesse n'est définie qu'à condition que le terme sous la racine soit positif :

$$2gH - \frac{k\ell_0^2}{m} \geq 0 \iff \boxed{H \geq H_{\text{min}} = \frac{k\ell_0^2}{2mg}}$$

2. On effectue désormais un bilan d'énergie mécanique entre le point A et un point P quelconque pour lequel le solide est en contact avec le ressort :

$$E(A) = E(P) \iff mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

La longueur du ressort dépend de l'altitude : $\ell = \frac{z}{\sin\alpha}$. On détermine l'énergie cinétique du solide en fonction de z :

$$\boxed{E_c(z) = \frac{1}{2}mv^2 = mg(H-z) - \frac{1}{2}k\left(\frac{z}{\sin\alpha} - \ell_0\right)^2}$$

3. Avant que le solide n'atteigne le ressort, il est entraîné sous l'effet de son poids et sa vitesse augmente. Par conséquent la vitesse ne peut être maximale qu'après le contact. On cherche l'altitude z_m pour laquelle l'énergie cinétique (et donc la vitesse) est maximale :

$$E_c'(z_m) = 0 \iff -mg - \frac{k}{\sin\alpha}\left(\frac{z_m}{\sin\alpha} - \ell_0\right) = 0 \iff z_m = \ell_0 \sin\alpha - \frac{mg\sin^2\alpha}{k}$$

On détermine la vitesse maximale : $\frac{1}{2}mv_m^2 = E_c(z_m)$. Après quelques calculs on arrive à l'expression suivante :

$$v_m^2 = \frac{k}{m}\left(\ell_0^2 - \frac{2mg\ell_0\sin\alpha}{k} + \frac{m^2g^2\sin^2\alpha}{k^2}\right) = \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}\right)^2 \iff \boxed{v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}\right)}$$

Corrigé DM11

Exercice : Masse lancée sur un ressort

1. On étudie le mouvement du solide dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $\vec{P}$, à la force de rappel du ressort $\vec{F}$ (une fois le contact établi) et à la réaction normale $\vec{N}$ du plan (pas de frottement). Le poids et la force de rappel sont conservatives. La réaction normale ne travaille pas car elle est à tout instant orthogonale au déplacement. On en déduit, d'après le théorème de la puissance mécanique, que **l'énergie mécanique du solide se conserve au cours du mouvement** :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\vec{N}) = 0 \implies E = \mathrm{Cste}$$

L'énergie potentielle du solide vaut : $E_p = mgz + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$, avec ℓ la longueur du ressort. On effectue un bilan d'énergie mécanique entre le point de départ du solide, noté A (altitude H, ressort de longueur ℓ_0, vitesse nulle) et le point O (altitude nulle, ressort de longueur nulle, vitesse v inconnue).

$$E(A) = E(O) \iff mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\ell_0^2 \iff \boxed{v = \sqrt{2gH - \frac{k\ell_0^2}{m}}}$$

Cette vitesse n'est définie qu'à condition que le terme sous la racine soit positif :

$$2gH - \frac{k\ell_0^2}{m} \geq 0 \iff \boxed{H \geq H_{\text{min}} = \frac{k\ell_0^2}{2mg}}$$

2. On effectue désormais un bilan d'énergie mécanique entre le point A et un point P quelconque pour lequel le solide est en contact avec le ressort :

$$E(A) = E(P) \iff mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

La longueur du ressort dépend de l'altitude : $\ell = \frac{z}{\sin\alpha}$. On détermine l'énergie cinétique du solide en fonction de z :

$$\boxed{E_c(z) = \frac{1}{2}mv^2 = mg(H-z) - \frac{1}{2}k\left(\frac{z}{\sin\alpha} - \ell_0\right)^2}$$

3. Avant que le solide n'atteigne le ressort, il est entraîné sous l'effet de son poids et sa vitesse augmente. Par conséquent la vitesse ne peut être maximale qu'après le contact. On cherche l'altitude z_m pour laquelle l'énergie cinétique (et donc la vitesse) est maximale :

$$E_c'(z_m) = 0 \iff -mg - \frac{k}{\sin\alpha}\left(\frac{z_m}{\sin\alpha} - \ell_0\right) = 0 \iff z_m = \ell_0 \sin\alpha - \frac{mg\sin^2\alpha}{k}$$

On détermine la vitesse maximale : $\frac{1}{2}mv_m^2 = E_c(z_m)$. Après quelques calculs on arrive à l'expression suivante :

$$v_m^2 = \frac{k}{m}\left(\ell_0^2 - \frac{2mg\ell_0\sin\alpha}{k} + \frac{m^2g^2\sin^2\alpha}{k^2}\right) = \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}\right)^2 \iff \boxed{v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}\right)}$$