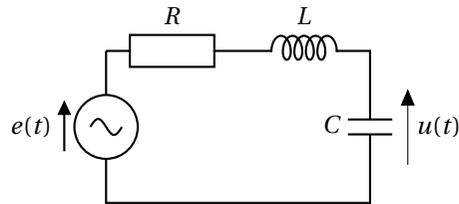


Chapitre 13 : Oscillations forcées - Résonance

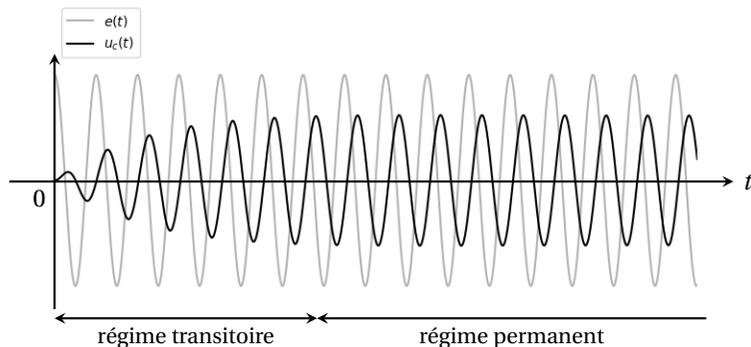
1 Système soumis à une excitation sinusoïdale

1.1 Schéma du montage et observations expérimentales

On considère un circuit RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$. Le générateur est éteint depuis longtemps et on l'allume à $t = 0$.



On observe à l'oscilloscope la tension aux bornes du condensateur et celle aux bornes du générateur.



On constate les faits suivants :

- Il apparaît d'abord un régime transitoire au cours duquel la tension $u(t)$ oscille avec une amplitude variable.
- À l'issue du régime transitoire on observe un régime permanent au cours duquel la tension $u(t)$ effectue **des oscillations sinusoïdales de même fréquence de $e(t)$** , mais d'amplitude et de phase à l'origine différente. On observerait le même comportement avec la tension aux bornes du résistor ou de la bobine, ou encore pour l'intensité.

Oscillations forcées

Tout système physique qui est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω finit par atteindre un régime permanent dans lequel il oscille à la pulsation d'excitation ; on parle d'**oscillations forcées**. Ce type de régime permanent est appelé **régime sinusoïdal forcé**.

1.2 Analyse mathématique

On montre que la tension $u(t)$ est solution de l'équation différentielle suivante (même démonstration que pour le régime libre) :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \cos(\omega t)$$

Comme pour toute équation différentielle linéaire, la solution générale s'écrit sous la forme $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$.

- $u_h(t)$ est la solution générale de l'équation homogène. **Elle décrit le comportement du système en régime libre** (voir chapitre précédent). Elle est quasi-nulle au bout de quelques τ (temps caractéristique du régime transitoire), quelques soient les conditions initiales.
- $u_p(t)$ est la solution particulière de l'équation différentielle. **Elle décrit le comportement du système en régime permanent**.

1.3 Évolution du système en régime permanent

Dans ce chapitre on étudiera exclusivement les oscillations forcées, c'est-à-dire le comportement en régime permanent.

Évolution en RSF

On admet qu'en régime permanent la réponse d'un système à une excitation de pulsation ω est sinusoïdale et de même pulsation :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Le premier objectif de ce chapitre consiste à comprendre comment déterminer l'amplitude U_m et la phase à l'origine φ de ces oscillations forcées. On utilise pour cela **la méthode complexe**.

2 Méthode complexe

2.1 Passage de l'espace réel à l'espace complexe

Représentation complexe et amplitude complexe

À toute fonction sinusoïdale du temps $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ on associe une **représentation complexe** $\underline{s}(t)$ et une **amplitude complexe** \underline{S} définies par :

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{S} = S_m e^{j\varphi}$$

avec $j^2 = -1$. Par la suite on considérera que le passage dans l'espace complexe consiste à remplacer une fonction sinusoïdale $s(t)$ par son amplitude complexe associée :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{S} = S_m e^{j\varphi}$$

2.2 Calculs dans l'espace complexe

Toutes les opérations mathématiques **linéaires** (addition, soustraction, multiplication par un réel, dérivation temporelle, intégration temporelle, etc) se conservent dans l'espace complexe.

2.2.1 Combinaison linéaire

Soient $s_1(t)$ et $s_2(t)$ des fonctions sinusoïdales de même pulsation :

$$\text{si } \begin{cases} s_1(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{S}_1 \\ s_2(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{S}_2 \end{cases} \text{ alors } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda s_1(t) + \mu s_2(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \lambda \underline{S}_1 + \mu \underline{S}_2$$

2.2.2 Intégration et dérivation temporelle

Soit $s(t)$ une fonction sinusoïdale du temps. Dériver (resp. intégrer) par rapport au temps dans l'espace réel est équivalent à multiplier (resp. diviser) par $j\omega$ dans l'espace complexe.

$$\text{si } s(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{S} \text{ alors } \begin{cases} \frac{ds}{dt} \xrightarrow{\mathbb{C}} j\omega \underline{S} \\ \int s(t) dt \xrightarrow{\mathbb{C}} \frac{\underline{S}}{j\omega} \end{cases}$$

Rq : La multiplication de deux fonctions sinusoïdales n'est **pas** une opération linéaire donc elle n'est pas conservée dans l'espace complexe.

2.3 Passage de l'espace complexe à l'espace réel

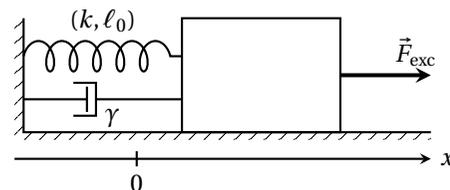
Module et argument d'un nombre complexe

Tout nombre complexe \underline{S} peut s'écrire sous la forme : $\underline{S} = S_m e^{j\varphi}$, avec $S_m = |\underline{S}|$ le **module** de \underline{S} et $\varphi = \arg(\underline{S})$ son **argument**. Le passage dans l'espace complexe est réversible, c'est-à-dire qu'à toute amplitude complexe \underline{S} on associe une fonction réelle du temps $s(t)$ telle que :

$$\underline{S} = S_m e^{j\varphi} \xrightarrow{\mathbb{R}} s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) = |\underline{S}| \cos(\omega t + \arg(\underline{S}))$$

2.4 Application de la méthode complexe

Une masse m peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal. Sa position est repérée par la coordonnée x , dont l'origine est choisie au niveau de la position d'équilibre. Elle est accrochée à un ressort élastique de raideur k , longueur à vide ℓ_0 . Un amortisseur exerce une force de frottement linéaire $\vec{f} = -\gamma \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de la masse. On modélise l'effet d'une excitation extérieure par une force sinusoïdale : $\vec{F}_{\text{exc}} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.



1. Montrer que l'équation du mouvement de la masse s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

avec ω_0 , Q et A à exprimer en fonction de m , k , γ et F_0 .

On souhaite déterminer le mouvement de la masse en régime forcé : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. On pose $\underline{X} = X_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe associée à $z(t)$.

2. Passer l'équation différentielle dans l'espace complexe et déterminer \underline{X} .

3. Calculer X_m et φ en fonction de la pulsation ω .

4. On se place dans la limite $\omega \rightarrow 0$. Quelle est l'amplitude des oscillations de la masse ? Quel est le déphasage entre $x(t)$ et $F_{\text{exc}}(t)$?

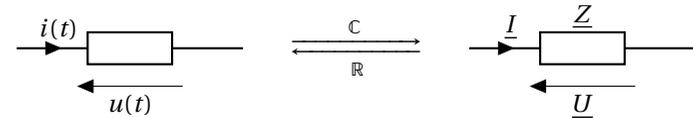
5. On se place dans la limite $\omega \rightarrow +\infty$. Quelle est l'amplitude des oscillations de la masse ?

3 Circuits linéaires en RSF

En électricité on utilise la méthode complexe d'une manière différente, qui ne nécessite pas d'établir l'équation différentielle dans l'espace réel.

3.1 Impédance, admittance

Impédance d'un dipôle linéaire passif



Tout dipôle linéaire passif vérifie, dans l'espace complexe, la **loi d'Ohm complexe** (écrite ici en convention récepteur) :

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

avec \underline{Z} une grandeur appelée **l'impédance complexe** du dipôle (en ohm).

On définit également **l'admittance complexe** du dipôle par : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ (en siemens).

3.2 Dipôles passifs usuels

Impédance d'un résistor, d'un condensateur et d'une bobine

On montre que les impédances de ces trois dipôles très classiques sont :

$$\underline{Z}_R = R \quad ; \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \quad ; \quad \underline{Z}_L = jL\omega$$

3.3 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff sont valables tant que l'on reste dans le domaine de l'ARQS. Ceci s'étend à l'espace complexe : **on peut appliquer toutes les lois de l'électricité en notation complexe.**

3.4 Associations d'impédances

Association de deux impédances

Deux impédances Z_1 et Z_2 en **série** sont équivalente à une impédance unique :

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

Deux impédances Z_1 et Z_2 en **dérivation** sont équivalente à une impédance unique telle que :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \iff Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

On peut généraliser pour un nombre quelconque d'impédances :

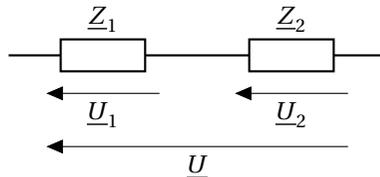
$$\text{en série : } Z_{eq} = \sum_i Z_i \quad ; \quad \text{en dérivation : } \frac{1}{Z_{eq}} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$$

3.5 Pont diviseur de tension

Loi du pont diviseur de tension

Si Z_1 et Z_2 sont deux impédances en série (voir figure ci-contre) alors :

$$U_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} U$$

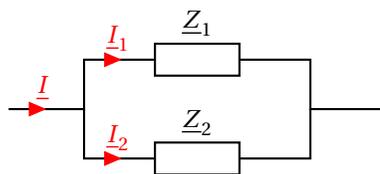


3.6 Pont diviseur de courant

Loi du pont diviseur de courant

Si Z_1 et Z_2 sont deux impédances en dérivation (voir figure ci-contre) alors :

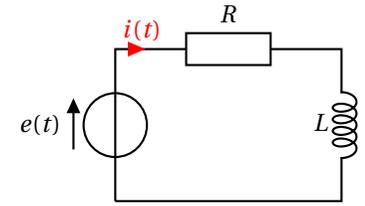
$$I_1 = \frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} I = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I$$



3.7 Application

On étudie les oscillations forcées d'un circuit RL alimenté par un générateur de tension alternative : $e(t) = E \cos(\omega t)$.

Déterminer l'intensité $i(t)$ dans le circuit.



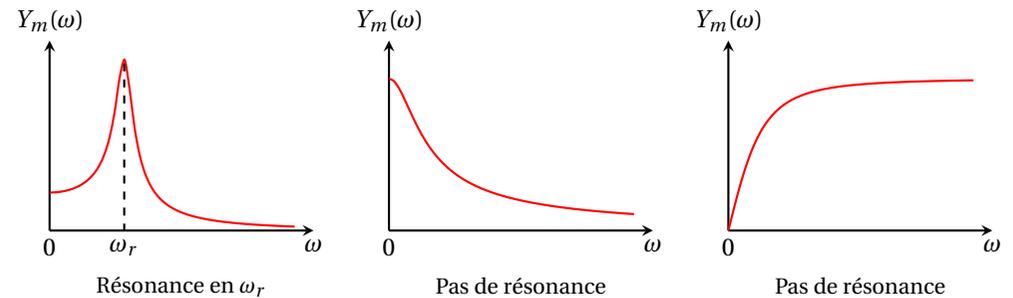
4 Résonances dans un circuit RLC série

4.1 Définitions

Certains systèmes physiques possèdent une ou plusieurs fréquences particulières pour lesquelles ils réagissent de façon très intense, c'est-à-dire avec des oscillations forcées d'amplitude élevée. Cette propriété peut être exploitée pour amplifier ou filtrer un signal (voir prochain chapitre). Elle peut également causer des désagréments. Par exemple une construction peut osciller sous l'effet du vent, d'un séisme, ou pour d'autres raisons. Si cette perturbation excite l'une des fréquence de résonance de la structure alors il y a un risque de fragilisation, voire de rupture.

Résonance en amplitude

Soit $y(t)$ une grandeur dont l'amplitude des oscillations forcées $Y_m(\omega)$ dépend de la pulsation. On dit que $y(t)$ entre en résonance à la pulsation ω_r si $\omega \rightarrow Y_m(\omega)$ possède un **maximum local** en ω_r .



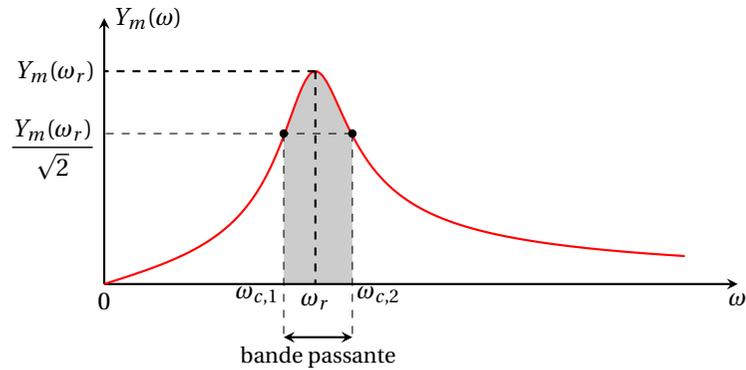
Pulsations de coupure et bande passante

On considère une grandeur $y(t)$ qui entre en résonance à la pulsation ω_r avec une amplitude maximale $Y_m(\omega_r)$. On appelle *bande passante* l'intervalle en pulsation, autour de ω_r , sur lequel l'amplitude des oscillations vérifie :

$$Y_m(\omega) \geq \frac{Y_m(\omega_r)}{\sqrt{2}}$$

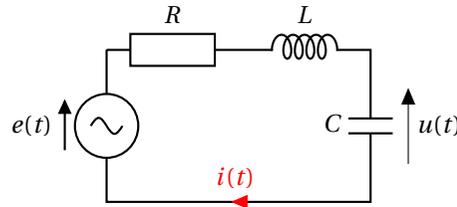
Les extrémités de la bande passante sont appelées *pulsations de coupure* : $Y_m(\omega_c) = \frac{Y_m(\omega_r)}{\sqrt{2}}$.

La bande passante mesure la "largeur en fréquence" d'une résonance, c'est-à-dire l'intervalle des fréquences sur lequel l'amplitude des oscillations forcées est encore proche de celle à la résonance.

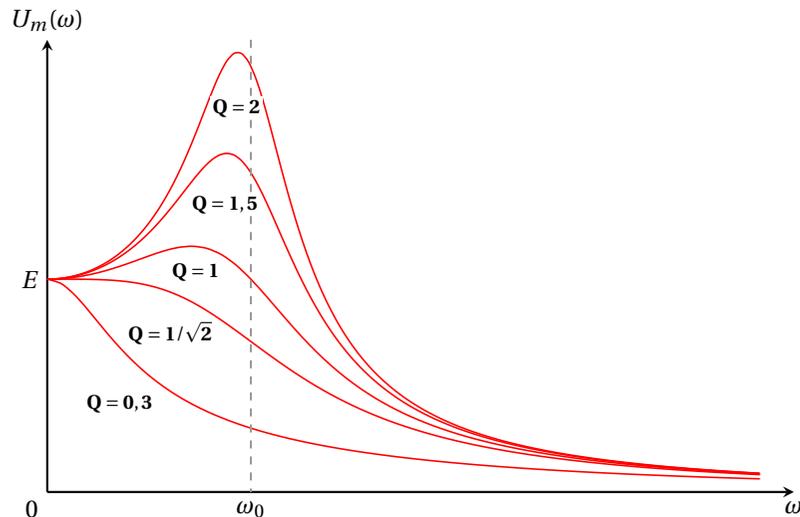


4.2 Résonance en tension

On revient au circuit RLC série présenté au début du chapitre, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$. On étudie l'éventualité d'une résonance pour la tension $u(t)$. Par la suite on notera $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$.



On utilise la méthode complexe pour déterminer l'amplitude $U_m(\omega)$ des oscillations forcées de $u(t)$. Le graphe ci-dessous montre les variations de $\omega \rightarrow U_m(\omega)$ pour différentes valeurs du facteur de qualité.



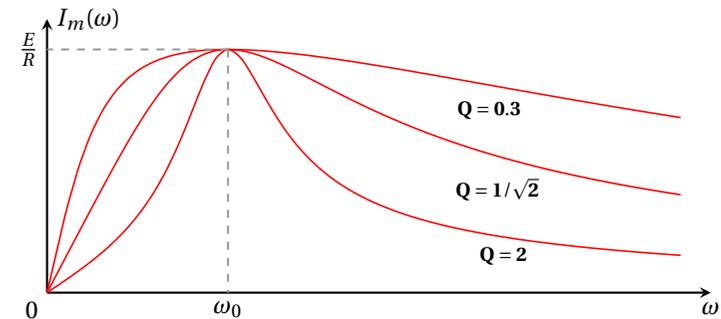
Propriétés de la résonance en tension

- La tension $u(t)$ entre en résonance à condition que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- La pulsation de résonance est alors : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.
- Plus le facteur de qualité est élevé et plus la résonance est intense et fine en fréquence.
- De manière plus générale on rencontre ce type de résonance à chaque fois qu'une grandeur $x(t)$ a une amplitude complexe qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{X} = \frac{X_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

4.3 Résonance en intensité

On étudie maintenant l'éventualité d'une résonance de l'intensité $i(t)$. On note $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$. Le graphe ci-dessous montre les variations de $\omega \rightarrow I_m(\omega)$ pour différentes valeurs du facteur de qualité.



Propriétés de la résonance en intensité

- L'intensité $i(t)$ entre en résonance **quelque soit la valeur du facteur de qualité**, à la pulsation $\omega_r = \omega_0$. L'amplitude à la résonance vaut $I_{m,\max} = \frac{E}{R}$.
- La largeur de la bande passante vaut : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. Plus le facteur de qualité est élevé et plus la résonance est fine en fréquence.
- De manière plus générale on rencontre ce type de résonance à chaque fois qu'une grandeur $x(t)$ a une amplitude complexe qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{X} = \frac{X_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$