

CHAPITRE 13

Oscillations forcées

On a étudié au chapitre précédent l'évolution d'un oscillateur en régime transitoire. On s'intéresse désormais au comportement *en régime alternatif*, c'est-à-dire dans le cas où l'action extérieure est variable et périodique. Pour des raisons mathématiques que l'on précisera au chapitre suivant, on étudie dans un premier temps le cas particulier où l'on force le système à osciller **sinusoïdalement** à une pulsation ω arbitraire. On présente une technique d'analyse mathématique des oscillations forcées, appelée *méthode complexe*, que l'on applique à des systèmes mécaniques et électroniques :

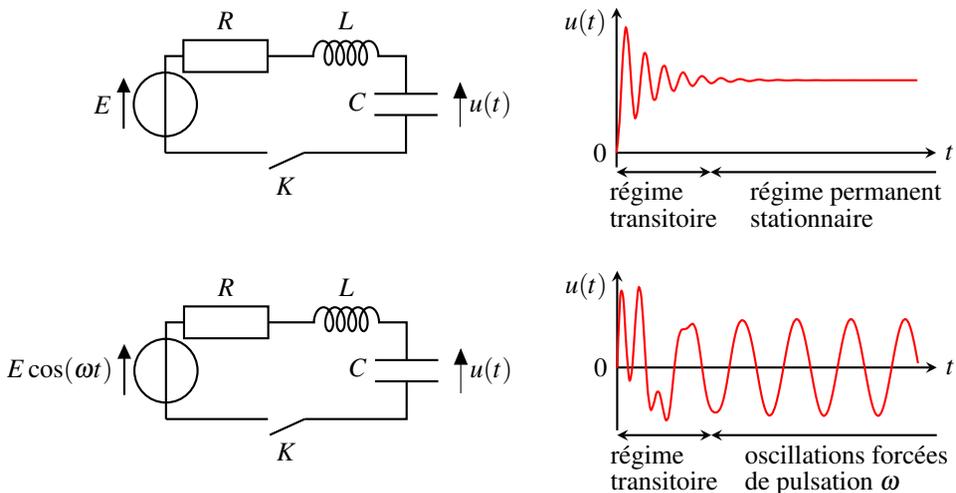
- En mécanique on étudie essentiellement le comportement d'oscillateurs amortis.
- En électronique on élargit l'étude à des systèmes divers en introduisant le concept *d'impédance complexe*.

La méthode complexe nous permettra, d'un point de vue théorique, de mettre en évidence le rôle de la fréquence dans l'intensité des oscillations forcées d'un système physique. Elle nous aide à comprendre le phénomène de **résonance**, c'est-à-dire la propriété qu'ont certains systèmes physique d'osciller très fortement pour une ou plusieurs fréquences bien particulières.

1 Oscillations forcées, méthode complexe

1.1 Réponse d'un oscillateur amorti à une action sinusoïdale

Comparons deux circuits *RLC* série identiques qui, par fermeture d'un interrupteur, sont alimentés à partir de $t = 0$ par une source idéale de tension. Dans le premier circuit la force électromotrice est constante et dans le deuxième elle est sinusoïdale de pulsation ω .



Le circuit soumis à un échelon de tension évolue en régime transitoire pendant une durée de l'ordre de quelques τ , puis finit par atteindre un régime permanent stationnaire. Lorsque la tension d'alimentation est sinusoïdale de pulsation ω on constate que le régime permanent est également sinusoïdal, de même pulsation ω que l'action extérieure.

Oscillations forcées

Un oscillateur amorti soumis à une action extérieure sinusoïdale de pulsation ω finit, après un régime transitoire de quelques τ , par osciller sinusoïdalement à la même pulsation ω que l'excitation : on parle **d'oscillations forcées**. Le régime permanent est appelé *régime sinusoïdal forcé* (RSF).

1.2 Équation d'évolution et RSF

Un oscillateur amorti soumis à une action sinusoïdale est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = B_m \cos(\omega t + \varphi_b)$$

avec le second membre $b(t) = B_m \cos(\omega t + \varphi_b)$ traduisant l'excitation sinusoïdale extérieure. La solution générale de cette équation est de la forme :

$$y(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{décrit le régime transitoire}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{décrit le régime permanent}}$$

La solution de l'équation homogène $y_h(t)$ a été étudiée au chapitre précédent. Elle s'amortit au bout de quelques τ et permet de connaître l'évolution en régime transitoire. La solution particulière $y_p(t)$ décrit le comportement en régime permanent. Dans ce chapitre on s'intéresse exclusivement à l'étude des oscillations forcées, donc à $y_p(t)$. On admet que la solution particulière est une sinusoïde de même pulsation que l'excitation (mais ayant sa propre amplitude et phase à l'origine) :

$$y_p(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$$

L'objectif de ce chapitre consiste à déterminer, pour une pulsation ω donnée, les valeurs de l'amplitude Y_m et de la phase à l'origine φ des oscillations forcées du système. On utilise pour cela la **méthode complexe**.

1.3 Passer de l'espace réel à l'espace complexe

Représentation complexe et amplitude complexe

À toute fonction sinusoïdale du temps $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$ on associe une *représentation complexe* $\underline{y}(t)$ et une *amplitude complexe* \underline{Y} telles que :

$$\underline{y}(t) = Y_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{Y} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{Y} = Y_m e^{j\varphi}$$

Par la suite on considérera que le passage de l'espace réel vers l'espace complexe consiste à remplacer la fonction réelle $y(t)$ par son amplitude complexe associée : $y(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{Y}$. L'amplitude complexe $\underline{Y} = Y_m e^{j\varphi}$ est définie de sorte que :

- son module s'identifie à l'amplitude réelle des oscillations : $Y_m = |\underline{Y}|$;
- son argument s'identifie à la phase à l'origine des oscillations : $\arg(\underline{Y}) = \varphi$.

⚠ Si $y(t)$ est écrite avec un **sinus** alors il faut passer à la forme cosinus pour obtenir l'amplitude complexe. Exemple : $y(t) = Y_m \sin(\omega t)$. On écrit :

$$y(t) = Y_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{Y} = Y_m e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jY_m$$

Linéarité

Le passage dans l'espace complexe est une opération linéaire, c'est-à-dire que pour deux fonctions sinusoïdales de mêmes pulsations $y(t)$ et $z(t)$:

$$\text{si } \begin{cases} y(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{Y} \\ z(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{Z} \end{cases} \quad \text{alors } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{\lambda y(t) + \mu z(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} \lambda \underline{Y} + \mu \underline{Z}}$$

Effet d'une dérivation/intégration temporelle dans l'espace complexe

- Dériver par rapport à t dans \mathbb{R} revient à **multiplier par $j\omega$** dans \mathbb{C} .
- Intégrer par rapport à t dans \mathbb{R} revient à **diviser par $j\omega$** dans \mathbb{C} .

\mathbb{R}	$y(t)$	$\frac{dy(t)}{dt}$	$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$	$\int y(t) dt$	$\int (\int y(t) dt) dt$
\mathbb{C}	\underline{Y}	$j\omega \underline{Y}$	$(j\omega)^2 \underline{Y}$	$\frac{\underline{Y}}{j\omega}$	$\frac{\underline{Y}}{(j\omega)^2}$

Exemple

On considère l'équation différentielle suivante vérifiée par la position $x(t)$ d'un oscillateur amorti mécanique. On note \underline{X} l'amplitude complexe associée à $x(t)$.

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

Passer dans l'espace complexe et exprimer \underline{X} en fonction de A , ω , ω_0 et Q .

On écrit chaque terme dans l'espace complexe :

$$(j\omega)^2 \underline{X} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = A$$

On conclut après avoir factorisé par \underline{X} :

$$\left(-\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) \underline{X} = A \iff \boxed{\underline{X} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}}$$

1.4 Passer de l'espace complexe à l'espace réel

Connaissant l'amplitude complexe \underline{Y} associée à une grandeur, on se demande comment retrouver son expression réelle $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$. On a vu au paragraphe précédent que l'amplitude réelle Y_m s'identifie au **module** de \underline{Y} et la phase à l'origine φ à l'**argument** de \underline{Y} .

Passage de \mathbb{C} dans \mathbb{R}

Connaissant l'expression de l'amplitude complexe \underline{Y} d'une grandeur physique, on détermine son expression réelle de la manière suivante :

$$\underline{Y} \xrightarrow{\mathbb{R}} y(t) = |\underline{Y}| \cos(\omega t + \arg(\underline{Y}))$$

Module d'un nombre complexe

Soit $\underline{Y} = A + jB$ un nombre complexe de partie réelle A et de partie imaginaire B . Son module vaut :

$$|\underline{Y}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

On retient les propriétés suivantes. Si \underline{Y} et \underline{Z} sont deux nombres complexes, avec \underline{Z} non nul :

$$|\underline{Y} \times \underline{Z}| = |\underline{Y}| \times |\underline{Z}| \quad \text{et} \quad \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{Z}|} = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{Z}|}$$

Argument d'un nombre complexe

Soit $\underline{Y} = A + jB$ un nombre complexe de partie réelle A non nulle et de partie imaginaire B . Son argument vaut :

$$\arg(\underline{Y}) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{B}{A}\right) [2\pi] & \text{si } A > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{B}{A}\right) [2\pi] & \text{si } A < 0 \end{cases}$$

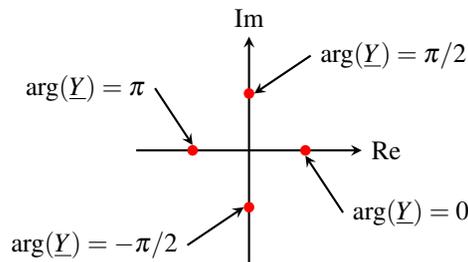
Si \underline{Y} est imaginaire pur alors $\arg(\underline{Y}) = \pm\pi/2$ selon le signe de B .

On retient les propriétés suivantes. Si \underline{Y} et \underline{Z} sont deux nombres complexes, avec \underline{Z} non nul :

$$\arg(\underline{Y} \times \underline{Z}) = \arg(\underline{Y}) + \arg(\underline{Z}) \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{\underline{Y}}{\underline{Z}}\right) = \arg(\underline{Y}) - \arg(\underline{Z})$$

On retient également ces quelques cas de figure très courants :

- $\arg(\underline{Y}) = 0$ si et seulement si \underline{Y} est un réel positif,
- $\arg(\underline{Y}) = \pi$ si et seulement si \underline{Y} est un réel négatif,
- $\arg(\underline{Y}) = \pi/2$ si et seulement si \underline{Y} est un imaginaire pur positif,
- $\arg(\underline{Y}) = -\pi/2$ si et seulement si \underline{Y} est un imaginaire pur négatif.



Exemple

Une tension $u(t)$ a pour amplitude complexe : $\underline{U} = \frac{E}{1 + j\omega\tau}$ avec E et τ des paramètres réels positifs. Exprimer $u(t)$.

► Calcul du module

On écrit la tension réelle sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. L'amplitude réelle U_m vaut :

$$U_m = |\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

► Calcul de l'argument

La phase à l'origine de $u(t)$ a pour expression :

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \underbrace{\arg(E)}_{=0} - \arg(1 + j\omega\tau) = -\arctan(\omega\tau)$$

On conclut : $u(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega\tau))$.

Application 1

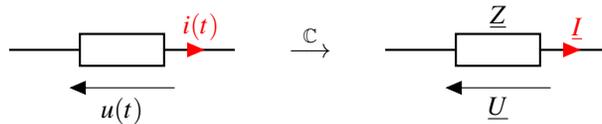
Exprimer $u(t)$ dans les cas suivants. Les paramètres E et τ sont des réels positifs.

$$\text{a) } \underline{U} = \frac{E}{j\omega\tau} \quad \text{b) } \underline{U} = \frac{E}{1 + \frac{1}{j\omega\tau}} \quad \text{c) } \underline{U} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} E$$

On rappelle que : $\frac{1}{j} = -j$.

2 Oscillations forcées électriques

2.1 Impédance d'un dipôle linéaire passif

Impédance et Admittance

Tout dipôle linéaire passif vérifie la *loi d'Ohm complexe*, qui relie la tension complexe \underline{U} à ses bornes et l'intensité complexe \underline{I} dans sa branche. En convention récepteur elle s'écrit :

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

avec \underline{Z} l'*impédance complexe* du dipôle, qui s'exprime en Ω . On définit également l'*admittance complexe* par : $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ (en S).

2.2 Résistor, bobine idéale, condensateur idéal

Impédances des dipôles passifs usuels

Le résistor, la bobine idéale et le condensateur idéal sont des dipôles linéaires. Leurs impédances respectives sont :

$$\boxed{\underline{Z}_R = R} \quad ; \quad \boxed{\underline{Z}_L = jL\omega} \quad ; \quad \boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}}$$

2.3 Associations d'impédances

Impédances en série

Quand deux dipôles linéaires passifs d'impédances Z_1 et Z_2 sont en série, on les associe **en sommant les impédances** :

$$Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2$$

On généralise à un nombre quelconque de dipôles en série : $Z_{\text{eq}} = \sum_k Z_k$.

Impédances en dérivation

Quand deux dipôles linéaires passifs d'impédances Z_1 et Z_2 sont en dérivation, on les associe **en sommant les admittances** :

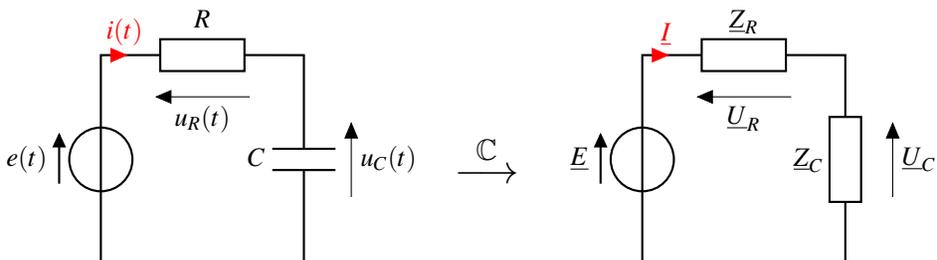
$$Y_{\text{eq}} = Y_1 + Y_2 \iff Z_{\text{eq}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

On généralise à un nombre quelconque de dipôles en dérivation : $Y_{\text{eq}} = \sum_k Y_k$.

2.4 Calculs dans l'espace complexe

Quand on étudie un circuit électrique par la méthode complexe, on commence par faire un schéma du montage en remplaçant :

- toutes les grandeurs réelles par leur amplitude complexe,
- tous les dipôles passifs par leur impédance associée (voir exemple ci-dessous).

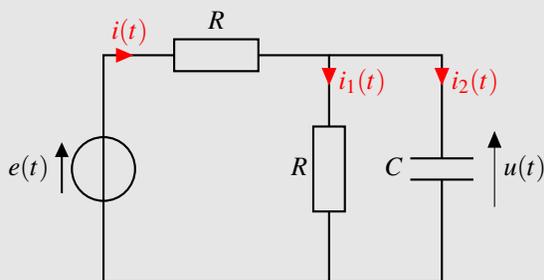


Les lois de l'électricité (loi des nœuds, des mailles, d'Ohm, des ponts diviseurs) s'expriment dans \mathbb{C} de la même manière que dans \mathbb{R} , en remplaçant les grandeurs réelles par leur amplitude complexe et les résistances par des impédances.

Par exemple on peut écrire dans le circuit précédent :

- Loi des mailles : $\underline{E} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$,
- loi d'Ohm pour le résistor : $\underline{U} = \underline{Z}_R \underline{I} = R \underline{I}$,
- loi d'Ohm pour le condensateur : $\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$,
- loi du pont diviseur de tension : $\underline{U}_R = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{E} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{E} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{E}$.

Exemple

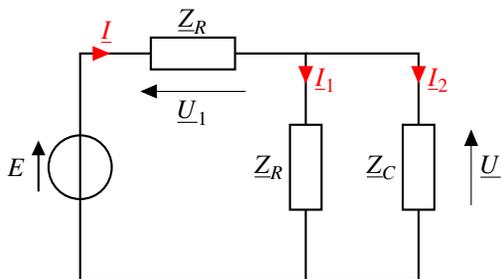


On étudie les oscillations forcées dans le circuit ci-dessus, alimenté par un générateur idéal qui impose une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

1. Exprimer $u(t)$.
2. On donne : $C = 470 \text{ nF}$, $R = 220 \Omega$ et $f = 2,2 \text{ kHz}$. Calculer le déphasage entre $i_1(t)$ et $i(t)$.

► Passer dans l'espace complexe et annoter le schéma

1. On trace le schéma du circuit en complexe. L'amplitude complexe de la force électromotrice vaut E .

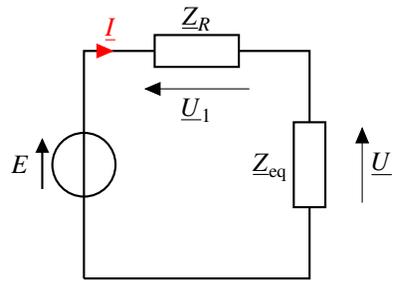


Pour déterminer $u(t)$ nous allons d'abord calculer l'amplitude complexe \underline{U} grâce aux lois de l'électricité, puis nous repasserons dans l'espace réel par un calcul de module et d'argument.

► Associer des impédances

On remarque que deux impédances sont en dérivation (celles correspondant aux intensités I_1 et I_2). On détermine l'admittance équivalente :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + jC\omega$$



On trace ci-dessus le schéma électrique équivalent. On obtient \underline{U} grâce à la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} E = \frac{E}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} = \frac{E}{1 + R\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{E}{2 + jRC\omega}$$

► Retour dans l'espace réel

On calcule le module de \underline{U} : $|U| = \frac{E}{\sqrt{4 + (RC\omega)^2}}$, puis son argument :

$$\arg(\underline{U}) = -\arg(2 + jRC\omega) = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{2}\right)$$

On conclut :
$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{4 + (RC\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{RC\omega}{2}\right)\right)$$

► Relier le déphasage aux grandeurs complexes

On note :

- $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ l'intensité réelle et $\underline{I} = I_m e^{j\varphi}$ son amplitude complexe,
- $i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ l'intensité réelle et $\underline{I}_1 = I_{1m} e^{j\varphi_1}$ son amplitude complexe.

Le déphasage entre $i_1(t)$ et $i(t)$ vaut : $\Delta\varphi = |\varphi_1 - \varphi|$. Or, on a vu qu'en termes de notation complexe : $\varphi_1 = \arg(\underline{I}_1)$ et $\varphi = \arg(\underline{I})$. on peut donc écrire :

$$\Delta\varphi = |\arg(\underline{I}_1) - \arg(\underline{I})| = \left| \arg\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}}\right) \right|$$

Si l'on souhaite calculer le déphasage entre $i_1(t)$ et $i(t)$ il faut d'abord exprimer le quotient $\underline{I}_1/\underline{I}$, puis calculer son argument. On utilise la loi du pont diviseur de courant :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \underline{I} \iff \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

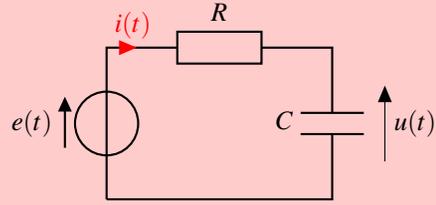
On termine le calcul : $\Delta\varphi = \left| \arg\left(\frac{1}{1 + jRC\omega}\right) \right| \iff \Delta\varphi = \arctan(RC\omega) = 55^\circ$.

Application 2

On étudie les oscillations forcées dans le circuit ci-contre, alimenté par un générateur idéal qui impose une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

On note $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$.

On donne $E = 15 \text{ V}$, $C = 20 \text{ nF}$, $R = 11 \text{ k}\Omega$ et $f = 800 \text{ Hz}$.



1. Calculer I_m et U_m .
2. Calculer le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$.

3 Résonance électrique

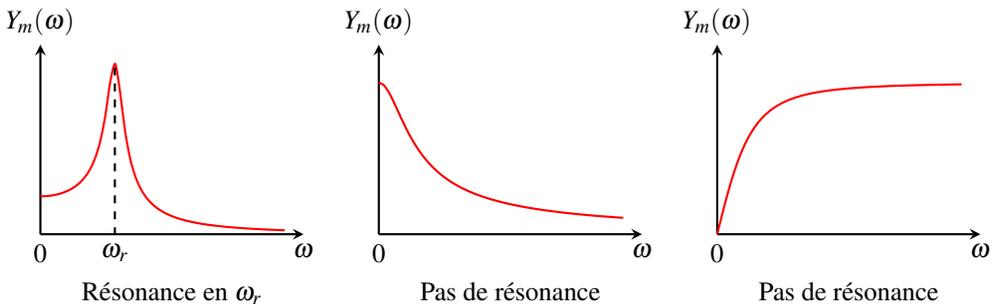
3.1 Définition

On considère un système physique qui effectue des oscillations forcées décrites par la grandeur $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$. En général l'amplitude des oscillations forcées dépend de ω , on peut dès lors l'étudier en tant que fonction $\omega \mapsto Y_m(\omega)$ de la pulsation imposée.

Résonance en amplitude

On dit que $y(t)$ entre en résonance en amplitude à la pulsation ω_r non nulle si l'amplitude $Y_m(\omega)$ des oscillations forcées possède un **maximum local** en ω_r .

Remarque : on ne parle pas de résonance si $\omega \mapsto Y_m(\omega)$ possède un maximum dans la limite $\omega \rightarrow 0$ ou $\omega \rightarrow +\infty$ (voir figures ci-dessous).



La résonance en amplitude se manifeste par l'existence d'une fréquence $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$ privilégiée des oscillations forcées de $y(t)$, pour laquelle l'amplitude est maximale comparée aux autres fréquences.

3.2 Pulsation de coupure, bande passante

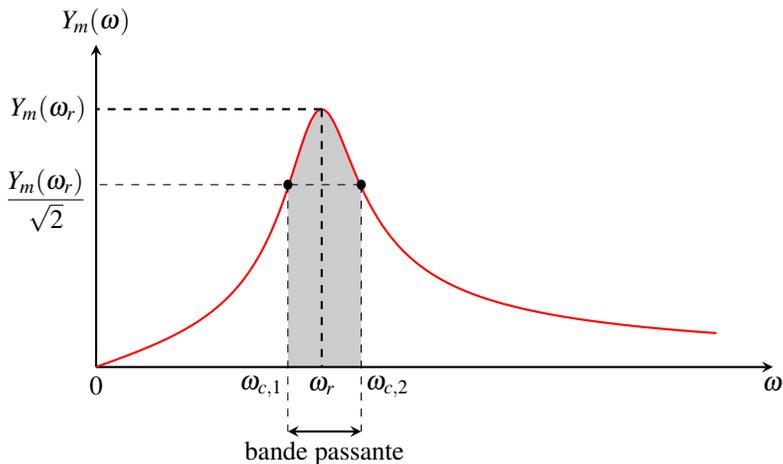
Quand on veut anticiper le comportement d'un système physique auquel on impose des oscillations forcées, il est important de vérifier s'il possède une ou plusieurs fréquences de résonance, et de connaître leur valeur. Il est également important de connaître le comportement du système **au voisinage de la résonance**.

Pulsations de coupure et bande passante

On considère une grandeur $y(t)$ qui entre en résonance à la pulsation ω_r avec une amplitude maximale $Y_m(\omega_r)$. On appelle *bande passante* l'intervalle en pulsation, autour de ω_r , sur lequel l'amplitude des oscillations vérifie :

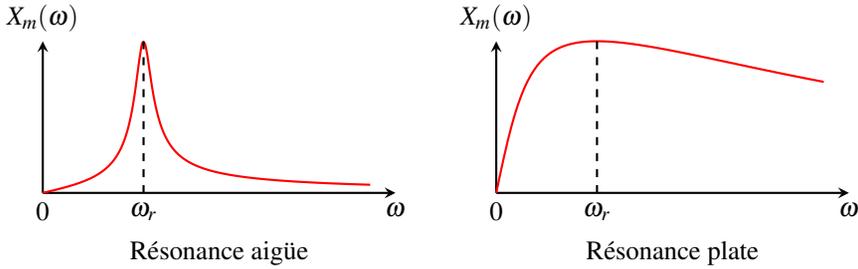
$$Y_m(\omega) \geq \frac{Y_m(\omega_r)}{\sqrt{2}}$$

Les extrémités de la bande passante, à condition d'être non nulles et non infinies, sont appelées *pulsations de coupure*. Elles vérifient : $Y_m(\omega_c) = \frac{Y_m(\omega_r)}{\sqrt{2}}$.

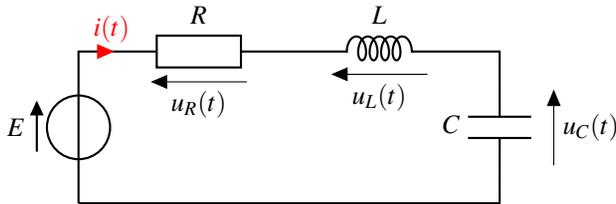


Résonance aigüe, résonance plate

- On parle de *résonance aigüe* lorsque l'amplitude des oscillations diminue rapidement lorsque la fréquence s'éloigne de f_r . Une résonance aigüe se caractérise par une bande passante de faible largeur : $\Delta\omega \ll \omega_r$.
- On parle de *résonance plate* lorsque l'amplitude des oscillations diminue lentement lorsque la fréquence s'éloigne de f_r . Une résonance plate est large en fréquence : $\Delta\omega \gg \omega_r$ (voir figures en haut de la page suivante).



3.3 Cas du circuit RLC série



Dans un circuit RLC série caractérisé par sa pulsation propre ω_0 et son facteur de qualité Q , les tensions aux bornes des différents composants présentent des propriétés différentes du point de vue de la résonance :

- la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur entre en résonance uniquement si le facteur de qualité est suffisamment élevé : $Q > 1/\sqrt{2}$. Si c'est le cas, la pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$;
- la tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor (ou, ce qui revient au même, l'intensité $i(t)$) entre en résonance à la pulsation ω_0 quelque soit la valeur de Q ;

Les propriétés d'une résonance dépendent du circuit considéré et, à l'intérieur d'un circuit donné, de la grandeur électrique (tension ou intensité) étudiée. Nous allons détailler les propriétés de la résonance pour $u_C(t)$, dite "résonance en tension", et celle pour $i(t)$, dite "résonance en intensité". Ces deux types de résonance sont explicitement au programme de première année.

En résumé

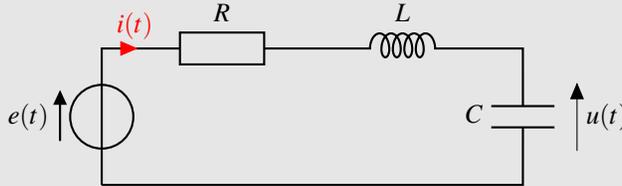
Pour déterminer les propriétés de la résonance d'une grandeur quelconque $y(t)$:

- Passer dans l'espace complexe ;
- Utiliser les lois de l'électricité dans \mathbb{C} pour déterminer l'amplitude complexe \underline{Y} ;
- Calculer le module pour obtenir l'amplitude réelle de $y(t)$: $Y_m = |\underline{Y}|$;
- Étudier les variations de la fonction $\omega \mapsto Y_m(\omega)$. Une pulsation de résonance correspond à un maximum local de cette fonction. On vérifiera le cas échéant si l'existence d'une résonance dépend de la valeur du facteur de qualité.

3.4 Résonance “en tension”

Exemple

Un circuit RLC série est alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice $e(t) = E \cos(\omega t)$. On étudie le comportement en régime forcé. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes du condensateur et \underline{U} son amplitude complexe.

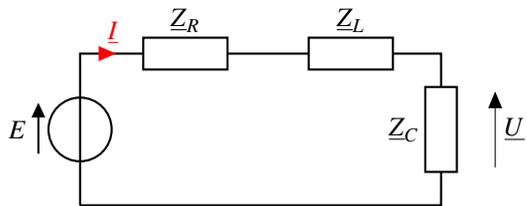


1. Montrer que $\underline{U} = \frac{E}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$, avec ω_0 et Q deux paramètres à exprimer en fonction de R , L et C .
2. À quelle condition sur le facteur de qualité y a-t-il résonance ? Déterminer alors la pulsation de résonance ω_r en fonction de ω_0 et Q . Tracer l'allure du graphe de $U_m(\omega)$ dans le cas où il y a résonance.
3. On se place à la pulsation ω_0 . Calculer l'amplitude U_m ainsi que le déphasage entre $u(t)$ et $e(t)$.

► Passage dans \mathbb{C} + mise en œuvre des lois de l'électricité

1. On annote le schéma en complexes et on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R} E$$



On remplace les impédances par leur expression :

$$\underline{U} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} E = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On identifie le facteur de qualité et la pulsation propre :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} = LC \\ \frac{1}{Q\omega_0} = RC \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

► **Étude analytique de la résonance**

2. On exprime l'amplitude réelle $U_m(\omega)$ en passant au module :

$$U_m(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

Pour étudier les variations de $U_m(\omega)$ on peut se contenter d'étudier le terme sous la racine car c'est le seul qui dépend de la pulsation. On pose $x = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ et on étudie les variations de $x \mapsto f(x) = (1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}$. Si f est minimale alors U_m sera maximale. On cherche à quelle condition la dérivée de f s'annule :

$$f'(x) = -2(1-x) + \frac{1}{Q^2} = 0 \iff x = 1 - \frac{1}{2Q^2} \iff \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

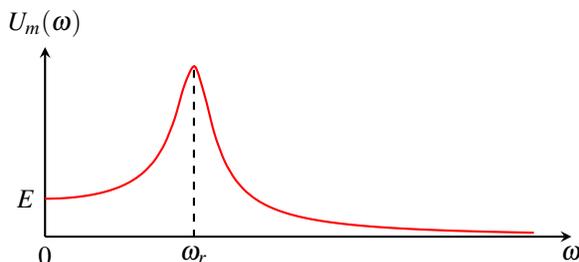
Une telle pulsation de résonance n'est définie qu'à condition que :

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \iff \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

La tension $u(t)$ entre en résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$, à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Pour tracer l'allure du graphe de $U_m(\omega)$ on détermine le comportement limite quand $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$:

$$U_m(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} E \quad \text{et} \quad U_m(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$$

On note également que la pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre ω_0 . On trace l'allure de la courbe d'amplitude.



► **Calculer un déphasage**

3. On exprime la tension complexe \underline{U} à la pulsation ω_0 : $\underline{U}(\omega_0) = \frac{QE}{j} = -jQE$. L'amplitude réelle vaut : $\boxed{U_m(\omega_0) = QE}$.

Le déphasage entre $u(t)$ et $e(t)$ vaut : $\Delta\varphi = |\varphi - \varphi_e|$ avec $\varphi_e = 0$ la phase à l'origine de $e(t)$, et :

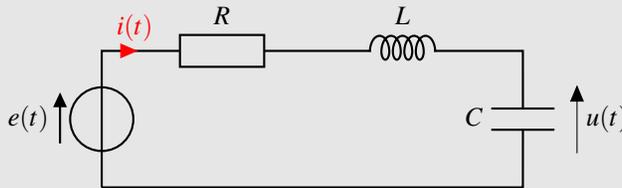
$$\varphi = \arg(-jQE) = -\frac{\pi}{2}$$

Le déphasage entre $u(t)$ et $e(t)$ vaut $\boxed{\Delta\varphi = \pi/2}$. À la pulsation ω_0 les tensions $u(t)$ et $e(t)$ oscillent en **quadrature de phase**.

3.5 Résonance “en intensité”

Exemple

Un circuit RLC série est alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice $e(t) = E \cos(\omega t)$. On étudie le comportement en régime forcé. On note $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ l'intensité dans le circuit et \underline{I} son amplitude complexe.

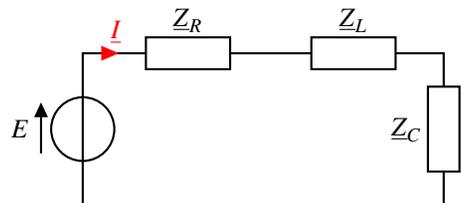


1. Montrer que $\underline{I} = \frac{\frac{E}{R}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$, avec ω_0 et Q deux paramètres à exprimer en fonction de R , L et C .
2. Montrer qu'il y a résonance quelque soit la valeur du facteur de qualité et déterminer la pulsation de résonance. Tracer l'allure du graphe de $I_m(\omega)$.
3. Exprimer les pulsations de coupure. Montrer que la bande passante a pour largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.
4. Quel est le déphasage entre $i(t)$ et $e(t)$ à la résonance ? Aux pulsations de coupure ?

► Passage dans \mathbb{C} + mise en œuvre des lois de l'électricité

1. On annote le schéma en complexes et on applique la loi des mailles :

$$E = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C)\underline{I} \iff \underline{I} = \frac{E}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}$$



On remplace les impédances par leur expression :

$$\underline{U} = \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\frac{E}{R}}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On identifie le facteur de qualité et la pulsation propre :

$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \\ \frac{1}{Q\omega_0} = RC \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

► **Étude analytique de la résonance**

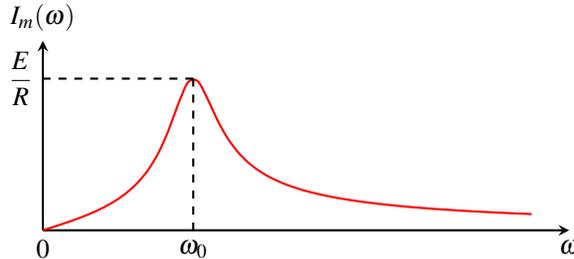
2. On exprime l'amplitude réelle $I_m(\omega)$ en passant au module :

$$I_m(\omega) = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

L'amplitude est maximale si le terme sous la racine est minimal, c'est-à-dire si le terme entre parenthèses s'annule. Quelque soit la valeur du facteur de qualité, **l'intensité $i(t)$ entre en résonance à la pulsation ω_0** . Pour tracer l'allure du graphe de $I_m(\omega)$ on détermine le comportement limite quand $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$:

$$I_m(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad I_m(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$$

On note qu'à la résonance l'amplitude des oscillations vaut $I_{\max} = E/R$. On trace l'allure de la courbe d'amplitude.



► **Déterminer une bande passante**

3. Les pulsations de coupures sont définies par :

$$I_m(\omega_c) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{E}{R} \iff \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{2}}$$

Les pulsations de coupure sont solutions de l'équation :

$$Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1 \iff Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1 \iff \omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q} \omega - \omega_0^2 = 0$$

Il y a deux équations du second degré à résoudre (avec le signe + puis le signe -). Le discriminant est le même dans les deux cas : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 > 0$. Il y a quatre racines réelles, mais on ne retient que les valeurs positives :

$$\boxed{\omega_{c,1} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 + \sqrt{4Q^2 + 1} \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_{c,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + \sqrt{4Q^2 + 1} \right)}$$

La largeur de la bande passante vaut : $\boxed{\Delta\omega = \omega_{c,2} - \omega_{c,1} = \frac{\omega_0}{Q}}$.

Dans le cas $Q \gg 1$ la résonance en intensité est **fine**. À l'inverse si $Q \ll 1$ la résonance est **plate**.

► **Calculer un déphasage**

4. On détermine l'intensité complexe à la résonance : $I(\omega_0) = \frac{E}{R}$. Elle est réelle positive donc $\varphi(\omega_0) = 0$. Sachant que la phase à l'origine de $e(t)$ est nulle également : $\varphi_e = 0$, on conclut que $i(t)$ et $e(t)$ **sont en phase à la résonance**.

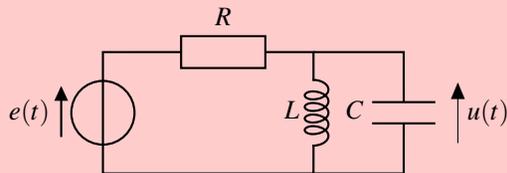
On a vu à la question précédente qu'aux pulsations de coupure : $Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$, l'intensité complexe est donc égale à $I(\omega_c) = \frac{\frac{E}{R}}{1 \pm j}$. On calcule la phase à l'origine :

$$\varphi(\omega_c) = -\arg(1 \pm j) = \pm \arctan(1) = \pm \frac{\pi}{4}$$

Aux pulsations de coupure le déphasage entre $i(t)$ et $e(t)$ est égal à $\boxed{\pi/4}$.

Application 3

Un circuit RLC est alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice $e(t) = E \cos(\omega t)$. On étudie le comportement en régime forcé. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ la tension aux bornes du condensateur et \underline{U} son amplitude complexe.



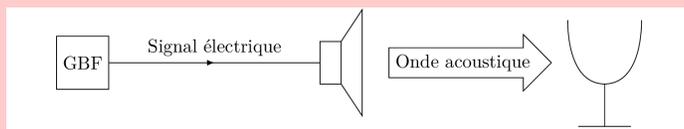
1. Montrer que $\underline{U} = \frac{E}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$, avec ω_0 et Q deux paramètres à exprimer en fonction de R , L et C .
2. Déterminer la pulsation de résonance.
3. L'expérience montre que $u(t)$ entre en résonance à la fréquence $f = 650 \text{ Hz}$ et que la bande passante a une largeur $\Delta f = 24 \text{ Hz}$.
Déterminer numériquement le facteur de qualité.
Sachant que $R = 1,6 \text{ k}\Omega$, calculer L et C .
4. Calculer le déphasage entre $e(t)$ et $u(t)$ à la fréquence $f = 700 \text{ Hz}$.

4 Oscillations forcées mécaniques

On pourrait définir des équivalents mécaniques pour les impédances vues en électricité, mais cela sort du programme de première année. **La méthode complexe en mécanique consiste à établir l'équation du mouvement avant de passer dans l'espace complexe** (comme on l'a vu dans l'exemple du paragraphe 1.3). Le retour dans l'espace réel s'effectue de la même manière qu'en électricité.

Application 4

Un verre à pied produit un son presque pur quand il est frappé d'un coup bref. Cela s'explique par le fait qu'il existe une fine plage de résonance autour d'une fréquence caractéristique (qui dépend de la forme du verre, du matériau, de son épaisseur, etc). On souhaite étudier la réponse en amplitude du verre au voisinage de sa fréquence de résonance. Un haut-parleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence f . Le verre, placé à proximité du haut-parleur (figure 1), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.

**Figure 1**

Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d'étudier les oscillations du verre on le modélise par une masse m mobile sur l'axe (Ox) horizontale associée à un ressort de raideur k , de longueur à vide nulle (figure 2). Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où \vec{v} désigne le vecteur vitesse de la masse m . D'un point de vue mécanique on admet que l'effet de l'onde acoustique produite par le microphone peut être modélisée par une force $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t + \Phi)$ qui s'exerce sur la masse.

**Figure 2** : Modèle mécanique du déplacement

1. Montrer que l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ s'écrit de la façon suivante, avec A_0 , ω_0 et Q trois constantes que l'on exprimera en fonction de F_0 , α , k et m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$ avec $j^2 = -1$.

2. Établir l'expression du module de \underline{X} en fonction de ω , ω_0 , A_0 et Q .
3. Justifier le numéro de graphe de la figure 3 compatible avec le tracé du module de \underline{X} en fonction de la pulsation ω .

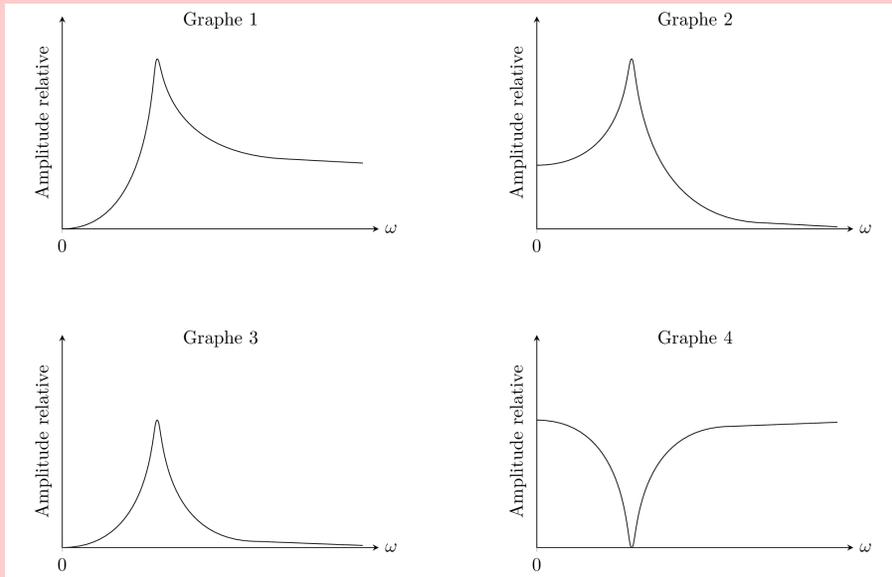


Figure 3 : Module de \underline{X} en fonction de ω

4. À quelle condition sur le facteur de qualité peut-on envisager une résonance d'amplitude ? On note Q_0 la valeur limite du facteur de qualité permettant la résonance.
5. Dans le cas d'une résonance d'amplitude, exprimer la pulsation correspondante, notée ω_r , en fonction de ω_0 et Q .