

Corrigé DM12

Exercice : Déflexion électrique

1. Pour que la trajectoire soit incurvée dans ce sens là, il faut que la force de Lorentz électrique soit dirigée suivant $-\vec{u}_y$, or $\vec{F} = -e\vec{E}$. Le champ \vec{E} doit être suivant $+\vec{u}_y$, donc $\boxed{U < 0}$.

2. Par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - eV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - eV_2 \iff v_2^2 = v_1^2 + \frac{2e}{m}(V_2 - V_1) \iff \boxed{v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}}$$

3. On applique le PFD à l'électron : $m\vec{a} = -e\vec{E}$. Par projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_y :

$$\boxed{m\ddot{x} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{m\ddot{y} = -eE = \frac{eU}{d}}$$

On intègre ces deux équations différentielles :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = \frac{eU}{d} \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = v_1 \sin i_1 \\ \dot{y} = \frac{eU}{md}t + v_1 \cos i_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = v_1 \sin i_1 t \\ y(t) = \frac{eU}{2md}t^2 + v_1 \cos i_1 t \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = v_1 \sin i_1 t} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t) = \frac{eU}{2md}t^2 + v_1 \cos i_1 t}$$

4. On peut remarquer que $\sin i_1 = \frac{\dot{x}(y=0)}{v_1}$ et $\sin i_2 = \frac{\dot{x}(y=d)}{v_2}$. Puisque \dot{x} se conserve au cours du temps, $\boxed{v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2}$.

Cette relation fait penser à la loi de Descartes pour la réfraction. La déflexion électrique a ici des propriétés analogues à celles de la réfraction des ondes lumineuses, les vitesses v_1 et v_2 jouant le rôle de l'indice de réfraction.

5. L'électron traverse la grille supérieure ssi $y = d \iff \frac{eU}{2md}t^2 + v_1 \cos i_1 t - d = 0$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = v_1^2 \cos^2 i_1 + 2eU$. Le trinôme a au moins une racine réelle ssi :

$$\Delta \geq 0 \iff v_1^2 \cos^2 i_1 + \frac{2eU}{m} \geq 0 \iff \boxed{v_1 \cos i_1 \geq \sqrt{-\frac{2eU}{m}}}$$

Dans le cas contraire, l'électron émerge par la grille inférieure dans une direction symétrique à la direction incidente par rapport à un axe normal aux grilles. Ce phénomène est analogue à celui de la **réflexion totale** en optique. On retrouve d'ailleurs une condition mathématique analogue : il y a "réflexion totale" de l'électron si $v_1 \sin i_1 > v_2 \iff i_1 > \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

L'angle $\arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ fait ici office d'angle de réflexion totale.

On remarque qu'il ne peut y avoir de réflexion totale que si $v_2 < v_1$, c'est-à-dire ici si $U < 0$. Dans le cas contraire ($U > 0$), l'électron va forcément passer par la grille supérieure.

Corrigé DM12

Exercice : Déflexion électrique

1. Pour que la trajectoire soit incurvée dans ce sens là, il faut que la force de Lorentz électrique soit dirigée suivant $-\vec{u}_y$, or $\vec{F} = -e\vec{E}$. Le champ \vec{E} doit être suivant $+\vec{u}_y$, donc $\boxed{U < 0}$.

2. Par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - eV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - eV_2 \iff v_2^2 = v_1^2 + \frac{2e}{m}(V_2 - V_1) \iff \boxed{v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}}$$

3. On applique le PFD à l'électron : $m\vec{a} = -e\vec{E}$. Par projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_y :

$$\boxed{m\ddot{x} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{m\ddot{y} = -eE = \frac{eU}{d}}$$

On intègre ces deux équations différentielles :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = \frac{eU}{d} \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = v_1 \sin i_1 \\ \dot{y} = \frac{eU}{md}t + v_1 \cos i_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = v_1 \sin i_1 t \\ y(t) = \frac{eU}{2md}t^2 + v_1 \cos i_1 t \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = v_1 \sin i_1 t} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t) = \frac{eU}{2md}t^2 + v_1 \cos i_1 t}$$

4. On peut remarquer que $\sin i_1 = \frac{\dot{x}(y=0)}{v_1}$ et $\sin i_2 = \frac{\dot{x}(y=d)}{v_2}$. Puisque \dot{x} se conserve au cours du temps, $\boxed{v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2}$.

Cette relation fait penser à la loi de Descartes pour la réfraction. La déflexion électrique a ici des propriétés analogues à celles de la réfraction des ondes lumineuses, les vitesses v_1 et v_2 jouant le rôle de l'indice de réfraction.

5. L'électron traverse la grille supérieure ssi $y = d \iff \frac{eU}{2md}t^2 + v_1 \cos i_1 t - d = 0$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = v_1^2 \cos^2 i_1 + 2eU$. Le trinôme a au moins une racine réelle ssi :

$$\Delta \geq 0 \iff v_1^2 \cos^2 i_1 + \frac{2eU}{m} \geq 0 \iff \boxed{v_1 \cos i_1 \geq \sqrt{-\frac{2eU}{m}}}$$

Dans le cas contraire, l'électron émerge par la grille inférieure dans une direction symétrique à la direction incidente par rapport à un axe normal aux grilles. Ce phénomène est analogue à celui de la **réflexion totale** en optique. On retrouve d'ailleurs une condition mathématique analogue : il y a "réflexion totale" de l'électron si $v_1 \sin i_1 > v_2 \iff i_1 > \arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$.

L'angle $\arcsin\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ fait ici office d'angle de réflexion totale.

On remarque qu'il ne peut y avoir de réflexion totale que si $v_2 < v_1$, c'est-à-dire ici si $U < 0$. Dans le cas contraire ($U > 0$), l'électron va forcément passer par la grille supérieure.