TD12 : Oscillateur amorti en régime transitoire : corrigé

Application 1

1. Le raisonnement est identique à celui de l'exemple précédent, on enlève simplement la tension du générateur : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{LC} = 0}$.

2. D'après les indications de l'énoncé on reconnaît que : $\frac{R}{L} = \frac{2}{\tau}$ et $\frac{1}{LC} = \frac{R}{L} \times \frac{1}{RC} = \frac{2}{\tau^2}$. L'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{\tau^2}u = 0}$$

On calcule le discriminant : $\Delta = -\frac{4}{\tau^2} < 0$. On est en régime **pseudopériodique**. On calcule les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique : $r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \frac{j}{\tau}$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

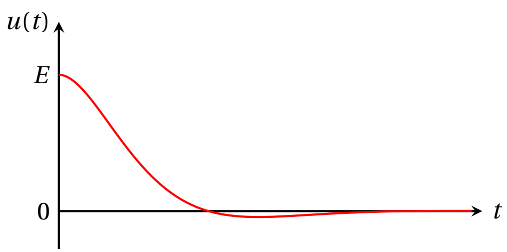
$$u(t) = \left[A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Le condensateur impose la continuité de $u(t)$ et la bobine celle de $i(t)$. On détermine les conditions initiales en exploitant ces continuités :

$$\begin{cases} u(0^+) = u(0^-) = E \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = \dfrac{i(0^-)}{C} = 0 \end{cases}$$

On montre alors que $A = B = E$, d'où : $\boxed{u(t) = E\left[\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

On trace l'allure du graphe de cette fonction. Pour s'en faire une idée, on connaît la valeur initiale et la tangente à l'origine (horizontale). On peut également montrer par identification que le facteur de qualité vaut $Q = \sqrt{2}/2$, il est donc légèrement supérieur à $\frac{1}{2}$. Le circuit effectue à peine une oscillation avant de retourner à l'équilibre.



3. Par un raisonnement analogue à celui de la question précédente on montre que l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}u = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 0$. On est en régime **critique**. On calcule la racine double du polynôme caractéristique : $r_{1,2} = -\frac{1}{\tau}$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $u(t) = [At + B]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Avec les conditions initiales (identiques pour les questions 2, 3 et 4), on montre que $B = E$ et $A = \frac{E}{\tau}$, d'où :

$$\boxed{u(t) = E\left[1 + \frac{t}{\tau}\right]\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

On trace l'allure du graphe de cette fonction. On est en régime critique donc le retour à l'équilibre s'effectue sans oscillation.

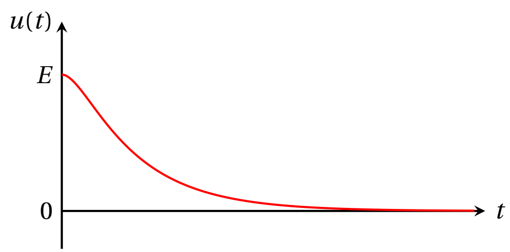
4. L'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{5}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{4}{\tau^2}u = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = \frac{9}{\tau^2} > 0$. On est en régime **apériodique**. On calcule les racines réelles du polynôme caractéristique : $r_{1,2} = -\frac{5}{2\tau} \pm \frac{3}{2\tau} = \left\{-\frac{4}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right\}$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $u(t) = A\mathrm{e}^{-4t/\tau} + B\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Les conditions initiales imposent $A = -\frac{E}{3}$ et $B = \frac{4E}{3}$, d'où :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{3}\left[4\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-4t/\tau}\right]}$$

On est en régime apériodique donc le retour à l'équilibre s'effectue sans oscillation. Ici, on peut montrer que $Q = 0{,}4$ est très légèrement inférieur à $0{,}5$. Le graphe a la même allure qu'en régime critique.

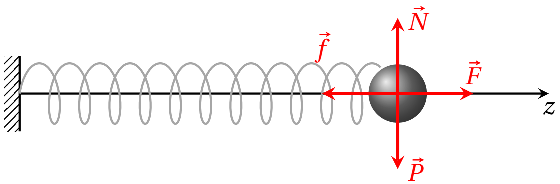


TD12 : Oscillateur amorti en régime transitoire : corrigé

Application 2

1. Le diapason produit une onde acoustique lorsqu'il oscille. Une partie de son énergie mécanique est convertie en énergie acoustique et transmise à l'air, ce qui explique que l'énergie du diapason diminue au cours du temps.

2. La masselotte est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale du support $\vec{N}$, à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -kz\,\vec{u}_z$ et à la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\dot{z}\,\vec{u}_z$.



On applique le principe fondamental de la dynamique à la masselotte dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}$. On le projette sur $\vec{u}_z$:

$$m\ddot{z} = -kz - \alpha\dot{z} \iff \boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0}$$

3. On identifie les paramètres canoniques de cet oscillateur :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\alpha}{m} \end{cases} \iff \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

4. On détermine les racines du polynôme caractéristique qui sont solutions de l'équation : $r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{k}{m} = 0$. Le discriminant vaut : $\Delta = \frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{4k}{m}$. D'après l'énoncé on est en régime pseudopériodique donc ce discriminant est strictement négatif. Les racines complexes conjuguées s'écrivent : $r = -\frac{\alpha}{2m} \pm j\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$. La solution générale de l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$\boxed{z(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{2m}}\left[A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}\,t\right)\right]}$$

5. On détermine la raideur du ressort équivalent : $\boxed{k = 4\pi^2 f_0 m = 3{,}0\cdot 10^5\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}$.

Les oscillations s'amortissent avec un temps caractéristique $\tau = \frac{2m}{\alpha}$. On considère grossièrement que l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ $5\tau = 30\,\mathrm{s}$ d'où $\tau = 6\,\mathrm{s}$. On en déduit la valeur du facteur de qualité :

$$Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\tau}{2} \times 2\pi f_0 \iff \boxed{Q = \frac{\pi f_0 \tau}{2} = 5\cdot 10^3}$$

Exercice 1 : Circuit RLC série en régime transitoire

1. Voir démo du cours : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{LC} = 0}$.

2. L'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{\tau^2}u_C = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = -\frac{4}{\tau^2} < 0$. On est en régime **pseudopériodique**. On calcule les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique :

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \frac{\mathrm{j}}{\tau}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$u_C(t) = \left[A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

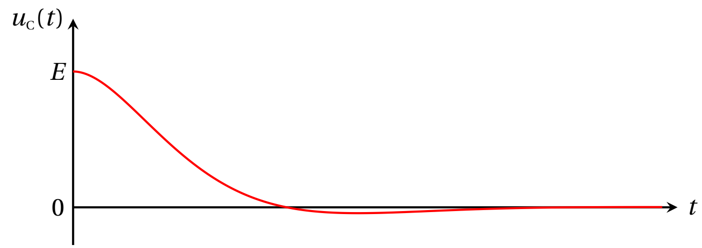
On détermine les conditions initiales par continuité :

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = E \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = \dfrac{i(0^-)}{C} = 0 \end{cases}$$

Avec ces conditions initiales, on obtient $A = B = E$, d'où :

$$\boxed{u_C(t) = E\left[\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

On trace l'allure du graphe de cette fonction. Pour s'en faire une idée, on connaît la valeur initiale et la tangente à l'origine (horizontale). On peut également montrer par identification que le facteur de qualité vaut $Q = \sqrt{2}/2$, il est donc légèrement supérieur à $\frac{1}{2}$. Le circuit effectue à peine une oscillation avant de retourner à l'équilibre.



On calcule enfin l'intensité :

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{2E}{R}\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

TD12 : Oscillateur amorti en régime transitoire : corrigé

3. L'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau^2}u_C = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 0$. On est en régime **critique**. On calcule la racine double du polynôme caractéristique :

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\tau}$$

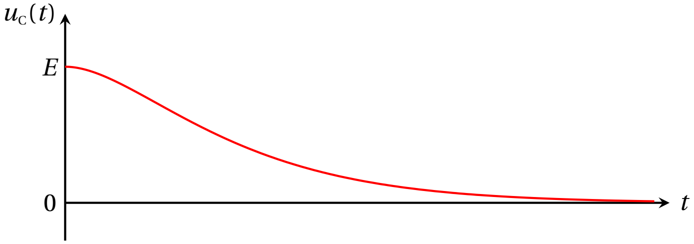
La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$u_C(t) = [At + B]\,e^{-t/\tau}$$

Avec ces conditions initiales (identiques pour les questions 2, 3 et 4), on obtient $B = E$ et $A = \frac{E}{\tau}$, d'où :

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 + \frac{t}{\tau}\right]e^{-t/\tau}}$$

On trace l'allure du graphe de cette fonction. On est en régime critique donc le retour à l'équilibre s'effectue sans oscillation.



On calcule enfin l'intensité :

$$\boxed{i(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R}te^{-t/\tau}}$$

4. L'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{5}{\tau}\frac{du_C}{dt} + \frac{4}{\tau^2}u_C = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = \frac{9}{\tau^2} > 0$. On est en régime **apériodique**. On calcule les racines réelles du polynôme caractéristique :

$$r_{1,2} = -\frac{5}{2\tau} \pm \frac{3}{2\tau} = \left\{-\frac{4}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right\}$$

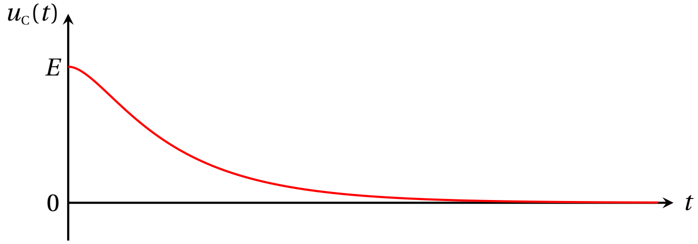
La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$u_C(t) = Ae^{-4t/\tau} + Be^{-t/\tau}$$

Les conditions initiales indiquent que $A = -\frac{E}{3}$ et $B = \frac{4E}{3}$, d'où :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3}\left[4e^{-t/\tau} - e^{-4t/\tau}\right]}$$

On trace l'allure du graphe de cette fonction. On est en régime apériodique donc le retour à l'équilibre s'effectue sans oscillation. Ici, on peut montrer que $Q = 0,4$ est très légèrement inférieur à $0,5$.



On calcule enfin l'intensité :

$$\boxed{i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{4E}{3R}\left(e^{-4t/\tau} - e^{-t/\tau}\right)}$$

Remarque : On ne peut pas comparer les temps de retour à l'équilibre dans chacun de ces trois cas. Notamment, il n'y a pas de raison que ce temps soit le plus faible en régime critique car ω_0 est différent pour chacune de ces équations. On rappelle que le temps de retour à l'équilibre est minimal en régime critique quand on compare les trois régimes **à ω_0 fixé**.

5. Désormais, il faut tenir compte de la présence du générateur. L'équation différentielle devient :

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}}$$

La solution générale de cette équation s'écrit comme aux questions précédentes, en rajoutant la solution particulière évidente E. Les conditions intiales sont désormais :

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \\ \dfrac{du_C}{dt}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = \dfrac{i(0^-)}{C} = 0 \end{cases}$$

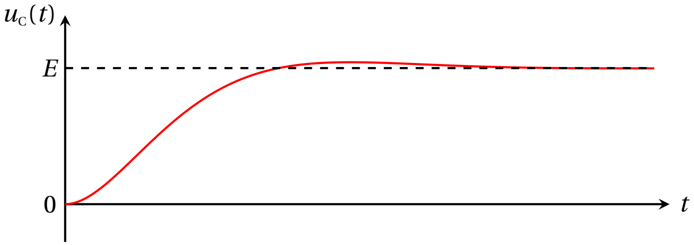
Dans le cas du régime pseudopériodique, la solution générale s'écrit :

$$u_C(t) = E + \left[A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]e^{-t/\tau}$$

Les conditions initiales amnènent à $A = B = -E$, d'où :

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \left[\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + \sin\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]e^{-t/\tau}\right)}$$

La tension part de zéro avec une tangente à l'origine horizontale. Elle tend vers l'asymptote E avec à peine une oscillation.



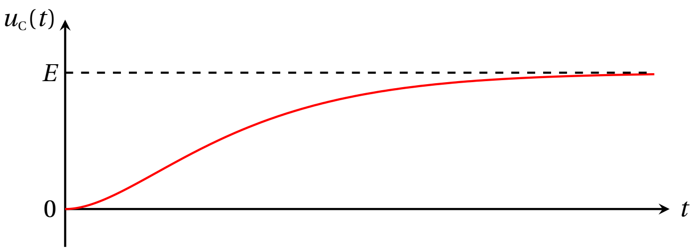
Dans le cas du régime critique, la solution générale s'écrit :

$$u_C(t) = E + [At + B]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Les conditions initiales amnènent à $B = -E$ et $A = -\frac{E}{\tau}$, d'où :

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \left[1 + \frac{t}{\tau}\right]\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

La tension tend vers l'asymptote E sans osciller.



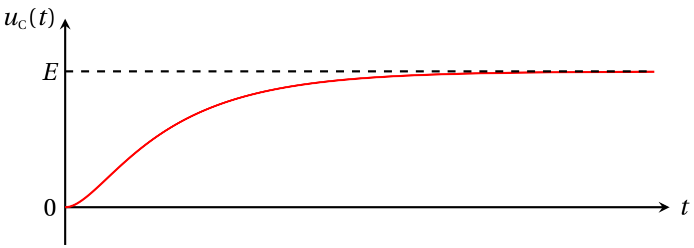
Dans le cas du régime apériodique, la solution générale s'écrit :

$$u_C(t) = E + A\mathrm{e}^{-4t/\tau} + B\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Les conditions initiales amnènent à $A = \frac{E}{3}$ et $B = -\frac{4E}{3}$, d'où : :

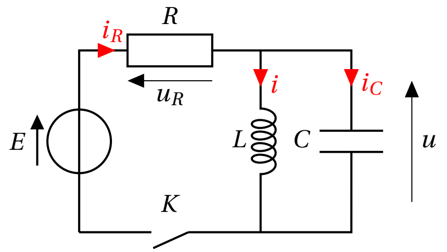
$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t/\tau} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t/\tau}\right)}$$

La tension tend vers l'asymptote E, à nouveau sans osciller.



Enfin, on peut montrer qu'à chaque fois, l'expression de l'intensité est l'opposée de celle obtenue en régime libre.

★ Exercice 2 : Circuit RLC parallèle



1. On commence par annoter le schéma (voir ci-contre) et on applique la loi des nœuds : $i_R = i + i_C$. On cherche ensuite à exprimer i_R et i_C en fonction de i :

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{E-u}{R} = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$$

On réinjecte dans la loi des nœuds pour obtenir l'équation différentielle attendue :

$$\frac{E}{R} = i + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{LC} = \frac{E}{RLC}}$$

Par identification, on écrit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\boxed{Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

2. L'application numérique donne $\boxed{Q = 2}$, on est en $\boxed{\text{régime pseudo-périodique}}$.

3. Une solution particulière évidente est $i_\mathrm{p} = \frac{E}{R}$. On écrit la solution générale de cette équation différentielle :

$$i(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{E}{R} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

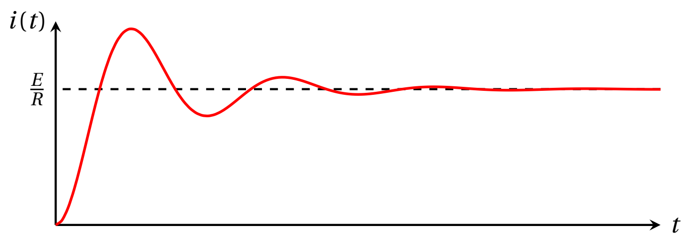
Les deux conditions initiales sont (par continuité) :

$$\begin{cases} i(0^+) = i(0^-) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{L} = \dfrac{u(0^-)}{L} = 0 \end{cases}$$

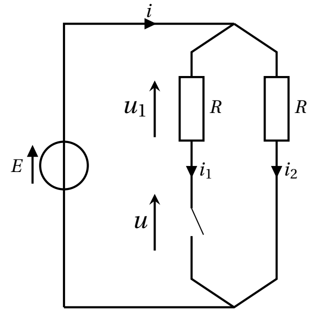
Après calculs, on obtient alors $A = -\frac{E}{R}$ et $B = -\frac{\lambda}{\omega}\frac{E}{R}$, d'où :

$$\boxed{i(t)\frac{E}{R}\left[1 - \left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]}$$

Pour tracer l'allure du graphe, on tient compte du fait que $i(0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$ (tangente horizontale à l'origine), que $i(t)$ tend vers l'asymptote $i(\infty) = \frac{E}{R}$ et enfin que $i(t)$ effectue des oscillations rapidement amorties puisque Q est légèrement supérieur à $1/2$.



⋆ Exercice 3 : Évolution simultanée du courant dans une bobine et un condensateur



1. À $t = 0^-$, on se trouve en régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Par conséquent, $\boxed{i_1(0^-) = 0}$.

Il vient que $u_1 = 0$ (loi d'Ohm), $\boxed{u(0^-) = E}$ (loi des mailles), $u_2(0^-) = E$ (loi des mailles), $\boxed{i_2(0^-) = \frac{E}{R}}$ (loi d'Ohm) et $\boxed{i(0^-) = \frac{E}{R}}$ (loi des nœuds).

Par continuité, $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = E}$ et $\boxed{i_2(0^+) = i_2(0^-) = \frac{E}{R}}$.

À $t = 0^+$, l'interrupteur est ouvert donc $\boxed{i(0^+) = 0}$. Enfin, $\boxed{i_1(0^+) = -\frac{E}{R}}$ (loi des nœuds).

2. Une fois K ouvert, le circuit est un RLC série en régime libre, avec une résistance équivalente égale à $2R$ (on rassemble les deux résistances en série). L'équation différentielle est la suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = 0 \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau^2} = 0}$$

3. On détermine le facteur de qualité du circuit : $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ et $\boxed{Q = \frac{\omega_0\tau}{2} = \frac{1}{2}}$.

On se trouve en $\boxed{\text{régime critique}}$. Le facteur d'amortissement vaut $\lambda = \frac{1}{\tau}$ et la solution générale de l'équation différentielle s'écrit : $u(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Les conditions initiales sont $u(0^+) = E$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i_1(0^+)}{C} = -\frac{E}{RC} = -\frac{E}{\tau}$. On montre alors que $B = E$ et $A = 0$, d'où :

$$\boxed{u(t) = E\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

⋆ Exercice 4 : Régime critique

1. Voir cours pour la démo (le circuit est un RLC série en régime libre) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = 0}$$

2. On est en régime critique donc :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \iff \boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 100\,\Omega}$$

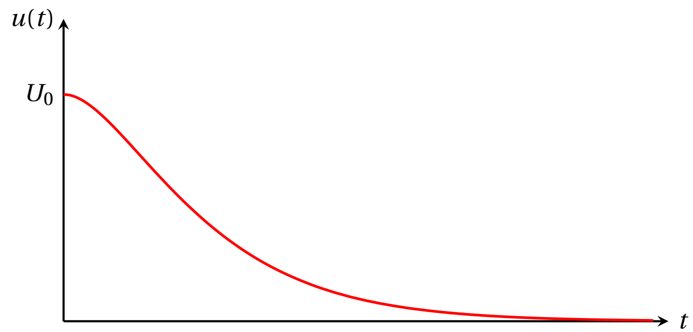
On écrit la solution générale de cette équation différentielle :

$$u(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$

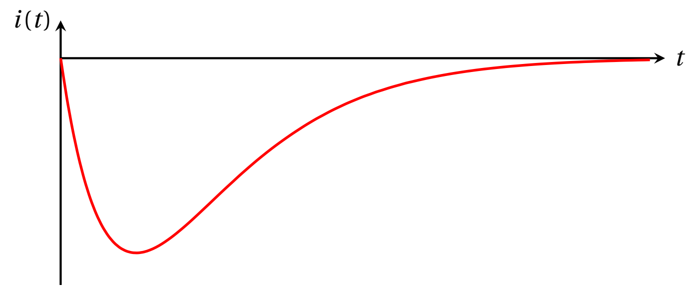
On détermine les conditions initiales par continuité :

$$\begin{cases} u(0^+) = u(0^-) = U_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = \dfrac{i(0^-)}{C} = 0 \end{cases}$$

On obtient alors $A = \lambda U_0$ et $B = U_0$ d'où $\boxed{u(t) = U_0(1 + \lambda t)\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.



3. On calcule l'intensité (définie en convention récepteur) : $\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -CU_0\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.



4. On effectue un bilan d'énergie du circuit entre $t = 0^+$ et $t = \infty$:

$$E_C + E_L + W_J = 0 \text{ avec } \begin{cases} E_C = \dfrac{1}{2}C\left[u^2(\infty) - u^2(0^+)\right] = -\dfrac{1}{2}CU_0^2 \\ E_L = \frac{1}{2}L\left[i^2(\infty) - i^2(0^+)\right] = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\boxed{W_J = \frac{1}{2}CU_0^2 = 0{,}18\,\mathrm{mJ}}$$

⋆ Exercice 5 : Régime pseudo-périodique

1. Le circuit étudié est un RLC série en régime libre, comme vu en cours. Les paramètres canoniques du circuit sont les suivants :

$$\lambda = \frac{R}{2L} \ ; \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ ; \ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

La pseudopulsation s'écrit : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, et la pseudopériode $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Connaissant L et C, la valeur de T permet d'obtenir celle de R :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \iff \boxed{R = 2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T^2}} = 78\,\Omega}$$

2. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\,e^{-\lambda t}$$

Par continuité, $u(0^+) = u(0^-) = U_0$ et $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{i(0^-)}{C} = 0$. Avec ces deux conditions initiales et après calculs, on montre que la solution de l'équation s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u(t) = U_0\left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)e^{-\lambda t}}$$

⋆ Exercice 6 : Étude expérimentale

1. Sur le graphe, on mesure $3T \approx 1{,}9\,\text{ms} \iff \boxed{T = 0{,}63\,\text{ms}}$.

On mesure également $u(0) = 10\,\text{V}$ et $u(3T) \simeq 1{,}5\,\text{V}$ donc $\boxed{\delta = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{10}{1{,}5}\right) = 0{,}63}$.

On constate qu'après trois oscillations la tension n'est pas encore tout à fait amortie, on en déduit que le facteur de qualité est supérieur à 3 et que l'on peut faire l'approximation $\omega \simeq \omega_0$ (avec ω la pseudopulsation).

Il vient qu'on peut écrire : $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1{,}0\cdot 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$ et $\delta = \frac{\pi}{Q} \iff \boxed{Q = \frac{\pi}{\delta} = 5{,}0}$.

2. Le circuit est un RLC série donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \sqrt{LC} = \frac{1}{\omega_0} & (1) \\ \sqrt{\frac{L}{C}} = QR & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{L = \frac{QR}{\omega_0} = 50\,\text{mH}} & (1)\times(2) \\ \boxed{C = \frac{1}{QR\omega_0} = 0{,}20\,\mu\text{F}} & (1)\div(2) \end{cases}$$

3. On effectue le bilan énergétique du circuit, entre $t = 0$ et $t = T$:

$$E_C + E_L + E_R = 0$$

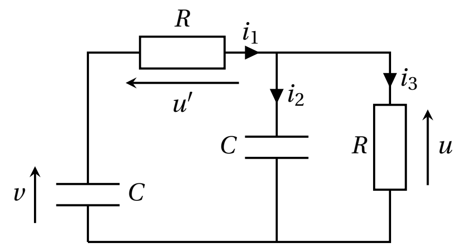
où E_C, E_L et E_R sont respectivement l'énergie reçue par le condensateur, la bobine et la résistance, au cours de la première oscillation. On écrit pour le condensateur et la bobine :

$$\begin{cases} E_C = \frac{1}{2}C\left[u^2(T) - u^2(0^+)\right] \\ E_L = \frac{1}{2}L\left[i^2(T) - i^2(0^+)\right] = \frac{LC^2}{2}\left[\left(\frac{du}{dt}(T)\right)^2 - \left(\frac{du}{dt}(0^+)\right)^2\right] \end{cases}$$

En $t = 0$ et $t = T$, on se trouve au niveau d'un maximum de $u(t)$ donc $\frac{du}{dt}(T) = \frac{du}{dt}(0^+) = 0 \iff E_L = 0$. Finalement, on mesure $u(T) \approx 5{,}3\,\text{V}$ et l'on obtient :

$$\boxed{E_R = -E_C = \frac{1}{2}C\left[u^2(0^+) - u^2(T)\right] = 7{,}2\,\mu\text{J}}$$

⋆⋆ Exercice 7 : Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur



1. D'après la loi des mailles : $v = u + u' \iff \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du'}{dt}$. On cherche à exprimer $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du'}{dt}$ en fonction de u.

- $i_3 = \frac{u}{R}$ (loi d'Ohm),
- $i_2 = C\frac{du}{dt}$ (loi d'évolution d'un condensateur),
- $i_1 = i_2 + i_3 = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$ (loi des nœuds),
- $u' = Ri_1 = u + RC\frac{du}{dt}$ (loi d'Ohm) $\iff \boxed{\frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt} + RC\frac{d^2u}{dt^2}}$,
- $\boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{i_1}{C} = -\frac{du}{dt} - \frac{u}{RC}}$ (loi d'évolution d'un condensateur).

On injecte ces expression dans la loi des mailles, ce qui donne :

$$-\frac{du}{dt} - \frac{u}{RC} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} + RC\frac{d^2u}{dt^2} \iff \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = 0}$$

On détermine le facteur de qualité du circuit : $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ et $\boxed{Q = \frac{\omega_0\tau}{3} = \frac{1}{3}}$.

On se trouve en $\boxed{\text{régime apériodique}}$.

2. Par continuité $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$ et $v(0^+) = v(0^-) = V_0$. De plus :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i_2(0^+)}{C} = \frac{i_1(0^+) - i_3(0^+)}{C} = \frac{i_1(0^+)}{C} \quad \text{car } i_3(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$$

D'après la loi des mailles : $v(0^+) = u(0^+) + Ri_1(0^+) \iff i_1(0^+) = \frac{v(0^+)}{R} = \frac{V_0}{R}$. Finalement, on trouve que : $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{V_0}{RC} = \frac{V_0}{\tau}}$.

En $t = \infty$, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts. Tous les courants sont nuls et $\boxed{u(\infty) = Ri_3(\infty) = 0}$.

3. On détermine les racines du polynôme caractéristique $r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0$:

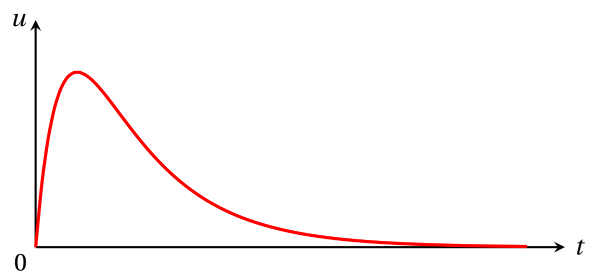
$$\Delta = \frac{5}{\tau^2} \implies \begin{cases} r_1 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2\tau} = -\frac{1}{\tau_1} \\ r_2 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2\tau} = -\frac{1}{\tau_2} \end{cases}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$$

D'après les conditions initiales obtenues à la question précédente, on trouve que :

$$A = -B = \frac{V_0}{\sqrt{5}} \implies \boxed{u(t) = \frac{V_0}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)}$$



⋆⋆ Exercice 8 : Étude d'une suspension

1. Dans la deuxième phase du mouvement, l'altitude de C est constante : $z_C = H$. On applique le PFD à l'habitacle, à l'équilibre mécanique $\left(\frac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}t} = 0\right)$:

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \iff -Mg - k\left(z_{eq} - H - \ell_0\right) = 0 \iff \boxed{z_{eq} = H + \ell_0 - \frac{Mg}{k}}$$

2. On applique maintenant le PFD à l'habitacle en mouvement ($\frac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}t}$ reste nul car l'altitude z_C est constante) :

$$\vec{P} + \vec{F} = M\vec{a} \iff -Mg - k\left(z_G - H - \ell_0\right) - \alpha\dot{z}_G = M\ddot{z}_G \iff \boxed{\ddot{z}_G + \frac{\alpha}{M}\dot{z}_G + \frac{k}{M}z_G = \frac{k}{M}(H + \ell_0)}$$

3. Z est l'altitude mesurée par rapport à l'équilibre. Dans ce cas, l'équation vérifiée par Z est homogène (à vérifier par le calcul) :

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = 0}$$

4. Le régime transitoire est le plus court lorsque l'on se trouve en **régime critique**. Par conséquent, il faut faire en sorte que $Q = \frac{1}{2}$. Ici :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{M\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{kM}}{\alpha} \implies \boxed{\alpha = 2\sqrt{kM}}$$

5. La masse totale du véhicule passe de M à $M + m$. Le facteur de qualité devient :

$$Q = \frac{\sqrt{k(M+m)}}{2\sqrt{kM}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{m}{M}} > \frac{1}{2}$$

Désormais, on se trouve en $\boxed{\text{régime pseudopériodique}}$. Les paramètres canoniques s'écrivent :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \quad , \quad \lambda = \frac{\sqrt{kM}}{M+m} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

La pseudopulsation vaut : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{k}{M+m} - \frac{kM}{(M+m)^2}} = \frac{\sqrt{km}}{M+m}$ et la pseudopériode :

$$\boxed{T = \frac{2\pi(M+m)}{\sqrt{km}}}$$

6. Pour avoir une pseudopériode égale à une seconde, on choisit la raideur k telle que :

$$\boxed{k = \frac{4\pi^2(M+m)^2}{Tm} = 2{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\alpha = 2\sqrt{kM} = 3{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}} \quad , \quad \boxed{Q = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{m}{M}} = 0{,}57} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau \simeq \frac{5}{\lambda} = \frac{5(M+m)}{\sqrt{kM}} = 0{,}44\,\mathrm{s}}$$