Devoir n°14 (non surveillé)

EXERCICE 1 - Moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels positifs tels que $a \leqslant b$.

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\left\{\begin{array}{l} a_0 = a \\ b_0 = b \end{array}\right.$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{array}\right. .$$

1) a) Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x \leqslant y$, alors $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$.

b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$.

2) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On note $L(a,b)$ leur limite commune : c'est la **moyenne arithmético-géométrique** de a et b.

3) a) En utilisant le fait que $a_n \leqslant L(a,b) \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire en Python une fonction qui, recevant a, b et un réel $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $L(a,b)$ à ε près.

b) Donner alors une valeur approchée de $L(1,2)$ à 10^{-9} près.

EXERCICE 2

À tout entier naturel n on associe l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Étudier la monotonie de la suite (I_n) et en déduire qu'elle est convergente. On notera L sa limite.

3) a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

b) En déduire un encadrement de I_n (on commencera par encadrer $x^2 + 1$ lorsque $x \in [0,1]$), puis déterminer la valeur de L.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

5) a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{2}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx$.

b) En procédant comme en 3)b), montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

c) En déduire la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Montrer que $S_n = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$. Indication : utiliser 4)a).

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.