Fiche d'exercices : Dérivation

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis étudier leur continuité et leur dérivabilité :

$$x \mapsto x\sqrt{x} \;;\; x \mapsto \sqrt{x^2-1} \;;\; x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2} \;;\; x \mapsto \sqrt{\ln(1+x^2)}.$$

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables, de classe $\mathcal{C}^1$?

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

3. $f(x) = \begin{cases} |x \ln x| & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

4. $f(x) = \begin{cases} a + be^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x^2-x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Exercice 3 Déterminer la classe exacte des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \;;\; f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \;;\; f(x) = |x|^n \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 4 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle symétrique par rapport à 0. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire, et que si f est impaire, alors f' est paire.

Exercice 5 Calculer la dérivée n^e des fonctions suivantes :

$$x \mapsto x^2 e^{-3x} \;;\; x \mapsto x \sin x \;;\; x \mapsto \ln x \;;\; x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 6

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée n^e de la fonction $f : x \mapsto (x-a)^n (x-b)^n$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 7 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 8 Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant une même limite finie ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$ (on pourra considérer la fonction $g = f \circ \tan$).

Exercice 9 Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$), dérivable sur $]a, +\infty[$, et telle que $f(a) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$ (on pourra considérer la fonction g définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $g(x) = f(a - \ln(x))$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$).

Exercice 10 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}_f$ distinct de l'origine O du repère tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point passe par O.

Exercice 11 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ a au plus 3 solutions réelles distinctes.

Exercice 12 Soit P un polynôme réel de degré n. Montrer que l'équation $e^x = P(x)$ a au plus $n+1$ solutions réelles.

Exercice 13 Montrer que : $\forall x > 0, \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 14 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$.

Exercice 15 Montrer que $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{15} \leqslant \operatorname{Arcsin} \dfrac{3}{5} \leqslant \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{8}$.

Exercice 16 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geqslant mx$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 17 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 18 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

2) En déduire que si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$ *(règle de l'Hospital)*.

Exercice 19 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 4 - \dfrac{\ln x}{4}$ et la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Étudier f et démontrer qu'elle admet un unique point fixe α, puis que $\alpha \in [3,4]$.

2) Montrer que $u_n \in [3,4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Établir, pour tout $x \in [3,4]$, l'inégalité $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{12^n}$.

c) Conclure que (u_n) converge vers α, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice 20 Montrer que la somme de deux fonctions convexes est une fonction convexe. Et le produit ?

Exercice 21 Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1, +\infty[$ et en déduire que : $\forall (x,y) \in]1, +\infty[^2$, $\ln \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

Exercice 22 Soit f une fonction continue, strictement monotone et convexe. Sa réciproque est-elle convexe ?