Corrigé DM13

Exercice : Oscillateur mécanique

1. À l'équilibre, la masse est soumise à son poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_x$ et à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(\tilde{x}-\ell_0)\,\vec{u}_x$. On applique le principe fondamental de la statique à la masse dans le référentiel galiléen $(O, \vec{u}_x)$, projeté sur $\vec{u}_x$:

$$0 = -mg - k(\tilde{x}-\ell_0) \iff \boxed{\tilde{x} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

2. On étudie maintenant le mouvement de la masse. On ajoute la force exercée par l'amortisseur : $\vec{F}_f = -\alpha\dot{x}\,\vec{u}_x$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse, projeté sur $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -mg - k(x-\ell_0) - \alpha\dot{x}$$

On effectue le changement de variable : $x = X + \ell_0 - \frac{mg}{k}$, $\dot{x} = \dot{X}$ et $\ddot{x} = \ddot{X}$:

$$m\ddot{x} = -mg - k\left(X - \frac{mg}{k}\right) - \alpha\dot{X} \iff \boxed{\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0}$$

On identifie les paramètres canoniques :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \\ 2\xi\omega_0 = \dfrac{\alpha}{m} \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\xi = \frac{\alpha}{2m\omega_0} = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}}$$

La nature du régime d'amortissement dépend du signe du discriminant de l'équation du second degré : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$. Celui-ci vaut : $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2-1)$.

- on est en régime pseudopériodique si et seulement si : $\Delta < 0 \iff 0 < \xi < 1$;
- on est en régime critique si et seulement si : $\Delta = 0 \iff \xi = 1$;
- on est en régime apériodique si et seulement si : $\Delta > 0 \iff \xi > 1$.

Remarque : si $\xi = 0$ alors il n'y a pas d'amortissement ; les oscillations sont harmoniques.

3. Les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique sont $r = -\xi\omega_0 \pm j\omega$. La solution générale s'écrit sous la forme : $X(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$. Les conditions initiales imposent que $A = X_0$ et $B = \frac{V_0+\xi\omega_0 X_0}{\omega}$. On conclut :

$$\boxed{X(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\left[X_0\cos(\omega t) + \frac{V_0+\xi\omega_0 X_0}{\omega}\sin(\omega t)\right]}$$

La masse effectue des oscillations amorties de pseudopériode $T = 2\pi/\omega$, avec un temps caractéristique de décroissance : $\tau = \frac{1}{\xi\omega_0}$.

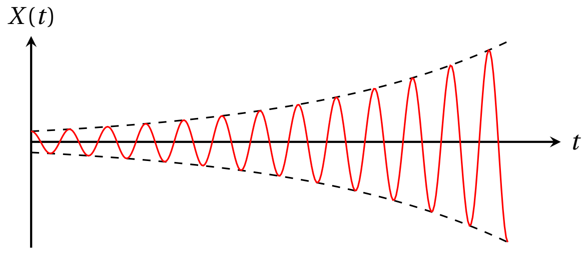
4. Si l'on tient compte de l'effet du moteur alors l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha-\beta}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

Le discriminant du polynôme caractéristique s'écrit : $\Delta = \left(\frac{\alpha-\beta}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}$. Si $\beta \gtrsim \alpha$ alors ce discriminant est strictement négatif et les racines complexes conjuguées sont : $r = \frac{\beta-\alpha}{2m} \pm j\sqrt{-\frac{\Delta}{2}}$. La solution générale s'écrit :

$$X(t) = \mathrm{e}^{\frac{\beta-\alpha}{2m}t}\left[A\cos\left(\sqrt{-\frac{\Delta}{2}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{-\frac{\Delta}{2}}\,t\right)\right]$$

L'exponentielle est croissante car $\frac{\beta-\alpha}{2m} > 0$. Si β est légèrement supérieur à α alors les oscillations, au lieu d'être exponentiellement amorties, sont au contraire **exponentiellement amplifiées**. Cela s'explique par un transfert d'énergie du moteur vers la masse qui surpasse l'énergie dissipée par l'amortisseur.



Évolution de la masse lorsque β est légèrement supérieur à α