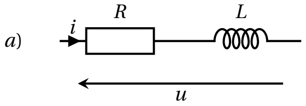
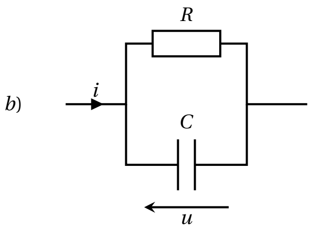
⋆ Exercice 1 : Dipôle en RSF





a) On suppose que $i(t) = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$. Donner l'expression littérale de $u(t)$.

b) On suppose que $u(t) = U_m \sin(\omega t)$. Donner l'expression littérale de $i(t)$.

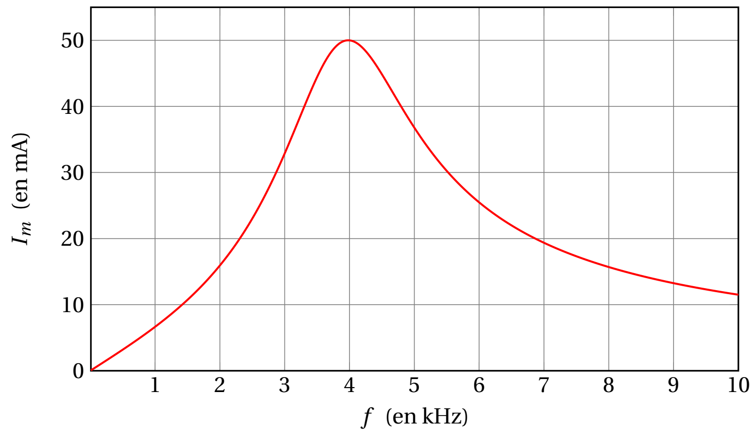
⋆ Exercice 2 : Circuit RL en RSF

Une fem sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ d'amplitude $E = 5\,\mathrm{V}$ et de fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$ alimente une bobine idéale d'inductance $L = 0,1\,\mathrm{H}$ en série avec une résistance $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.

1. Exprimer la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine. Tracer sur un même graphe $u(t)$ et le signal $e(t)$ délivré par le générateur.
2. On fait librement varier la fréquence f. La tension $u(t)$ peut-elle entrer en résonance ? Justifier.

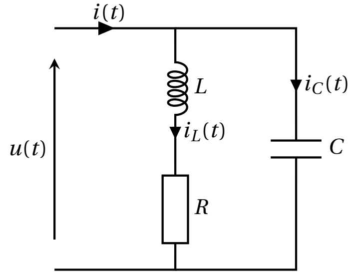
⋆ Exercice 3 : Résonance en intensité

On effectue l'étude de la résonance en intensité d'un circuit RLC série alimenté par une fem d'amplitude $E_0 = 5\,\mathrm{V}$. Le graphique ci-dessous représente l'amplitude I_m du courant parcourant le circuit en fonction de la fréquence f.



Déterminer numériquement la fréquence propre du circuit, le facteur de qualité ainsi que les valeurs de R, L et C.

⋆ Exercice 4 : Circuit RLC



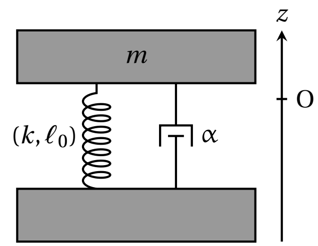
Soit le circuit ci-contre, pour lequel on donne :
$U = 220\,\mathrm{V}$ (amplitude de $u(t)$);
$f = 500\,\mathrm{Hz}$; $L = 0,3\,\mathrm{H}$;
$R = 600\,\Omega$.

1. Montrer que l'admittance équivalente de ce dipôle s'écrit sous la forme :

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + (L\omega)^2} + \mathrm{j}\omega\left(C - \frac{L}{R^2 + (L\omega)^2}\right)$$

2. La tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ sont en phase. Que pouvez-vous dire de $\underline{Y}$? En déduire la valeur de C.
3. Calculer les amplitudes des courants i, i_L et i_C.

⋆ Exercice 5 : Vibrations d'un moteur



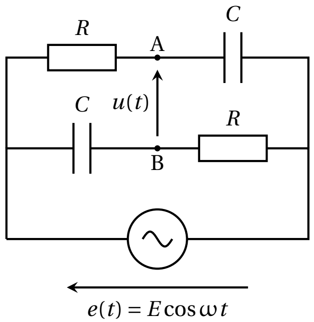
Lorsqu'un moteur de type compresseur fonctionne, il est nécessaire de prévoir un système de suspension pour amoindrir les vibrations du châssis. Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m. La suspension peut être modélisé par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du moteur et α une constante positive. On s'intéresse au mouvement vertical du moteur dans un référentiel galiléen, repéré par un axe (Oz) ascendant.

1. Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile. Déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort. La position du moteur dans ce cas est prise comme origine de l'axe (Oz). Lorsque le moteur fonctionne, tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme $\vec{F} = F_0 \cos\omega t\,\vec{u}_z$.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z, lorsque le moteur fonctionne.
3. En régime forcé, on recherche des solutions de la forme $v(t) = V_0\cos(\omega t + \varphi)$. On note $v(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{V}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]$ avec $\underline{V} = V_0 e^{\mathrm{j}\varphi}$. Exprimer $\underline{V}$ sous la forme :

$$\underline{V} = \frac{V_m}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

   Donner l'expression de V_m, Q et ω_0 en fonction de F_0, m, α et k.
4. Exprimer $V_0(\omega)$ puis tracer son allure.
5. La pulsation ω vaut $628\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Le moteur a une masse $m = 10\,\mathrm{kg}$ et on dispose de deux ressorts de raideurs $k_1 = 4.10^6\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et $k_2 = 10^6\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

⋆ Exercice 6 : Circuit déphaseur

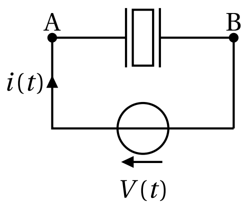


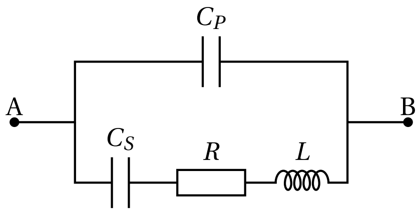
Les deux résistances ont même valeur R et les deux capacités sont identiques.

Montrer qu'à toute fréquence $u(t)$ a la même amplitude que $e(t)$. Calculer l'avance de phase φ de $u(t)$ par rapport à $e(t)$. Tracer $\varphi(\omega)$.

⋆⋆ Exercice 7 : Résonateur à quartz

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice qui a la particularité de se déformer quand on lui applique une tension électrique (phénomène de *piézo-électricité*). Il est utilisé pour réaliser des circuits oscillants de grande stabilité en fréquence, notamment dans les montres à quartz.
On représente ci-dessous à gauche le montage d'un cristal de quartz alimenté par une tension sinusoïdale $V(t)$. La figure de droite représente un modèle électrique équivalent du cristal. Pour les applications numériques on prendra $L = 500\,\text{mH}$, $C_S = 0{,}0800\,\text{pF}$ et $C_P = 8{,}00\,\text{pF}$.

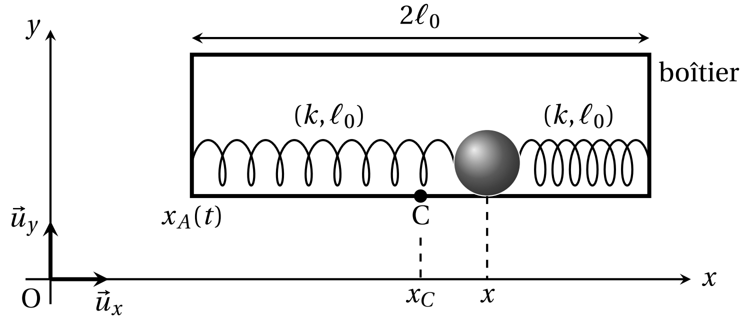




1. En supposant que l'on peut négliger la résistance du cristal montrer que son impédance équivalente s'écrit sous la forme :
$$\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{j\alpha\omega}\,\frac{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_a^2}}$$
et donner l'expression de α, ω_r^2 et ω_a^2 en fonction de L, C_P et C_S. Montrer aussi que $\omega_a^2 > \omega_r^2$.
2. Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r correspondant aux pulsations ω_a et ω_r.
3. À quelle condition sur le module Z_{AB} de l'impédance du quartz l'intensité $i(t)$ entre-t-elle en résonance ? Pour quelle fréquence cela se produit-il ?
4. On parle d'antirésonance de $i(t)$ lorsque le module Y_{AB} de l'admittance du quartz est minimale pour une pulsation particulière. Expliquer le terme d'antirésonance. Pour quelle fréquence cela se produit-il ? Que peut-on dire de l'intensité $i(t)$ dans ce circuit à l'antirésonance ?
5. Calculer l'écart relatif entre les fréquence de résonance et d'antirésonance. Commenter.

⋆⋆ Exercice 8 : Accéléromètre

Un accéléromètre est un dispositif électromécanique placé à l'intérieur d'un boîtier, solidaire d'un objet physique (téléphone, manette de wii, caméra GoPro, etc) et qui délivre une tension proportionnelle à l'accélération du boitier. Le schéma ci-dessous représente un modèle simplifié d'accéléromètre **uniaxe**, c'est-à-dire mesurant l'accélération dans une seule direction (trois accéléromètres placés dans des directions orthogonales permettent de mesurer une accélération pour un mouvement quelconque). On suppose ici que le boîtier se déplace uniquement dans la direction (Ox) horizontale. L'axe (Oy) est vertical.

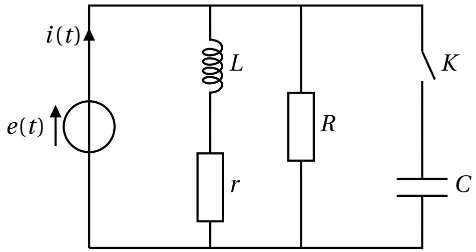


L'accéléromètre est constitué d'une masselotte de masse m accrochée à deux ressorts, identiques de raideur k et longueur à vide ℓ_0, dont les extrémités sont solidaires du boîtier. Le déplacement du boîtier dans le référentiel terrestre supposé galiléen est repéré par l'abscisse $x_C(t)$ de son centre. Un mécanisme non représenté permet de produire une tension proportionnelle au déplacement $X(t) = x(t) - x_C(t)$ de la masselotte par rapport au centre du boîtier. Outre l'action des ressorts la masselotte est soumise à :

- son poids $\vec{P}$;
- la réaction $\vec{R}$ du boîtier ;
- une force dissipative $\vec{f} = -2\alpha(\dot{x} - \dot{x}_C)\vec{u}_x = -2\alpha\dot{X}\vec{u}_x$ proportionnelle à la vitesse de déplacement de la masselotte par rapport aux parois du boîtier.

1. Montrer que la résultante des forces exercées par les deux ressorts vaut $\vec{F}_r = -2kX\vec{u}_x$.
2. Établir l'équation du mouvement de la masselotte sous la forme :
$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a(t)$$
où $a(t) = \ddot{x}_C(t)$ est l'accélération du boîtier et ω_0 et Q des paramètres à exprimer en fonction de k, m et α.
3. On suppose que l'accélération du boîtier est sinusoïdale : $a(t) = a_m\cos(\omega t)$. On note $X(t) = \text{Re}\left[\underline{X}e^{j\omega t}\right]$ et $a(t) = \text{Re}\left[\underline{A}e^{j\omega t}\right]$. Exprimer $\underline{X}$ en fonction ω, ω_0, Q et $\underline{A}$.
4. On suppose que l'accéléromètre est construit de sorte que $f_0 \gg f$. Simplifier l'expression de $\underline{X}$ et montrer qu'en première approximation le déplacement $X(t)$ de la masselotte par rapport au boîtier est proportionnelle à son accélération $a(t)$.

⋆⋆ Exercice 9 : Une question d'impédance



Soit le circuit ci-contre où le générateur de f.e.m. $e(t) = e_m \cos(\omega t)$, débite un courant $i(t)$ tel que $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$.

L'amplitude de $i(t)$ est la même, que l'interrupteur soit ouvert ou fermé.

1. Soient respectivement $\underline{Y_1}$ et $\underline{Y_2}$ l'admittance équivalente du circuit quand K est ouvert puis fermé. Justifier que $\underline{Y_1}$ et $\underline{Y_2}$ ont le même module.
2. Justifier que $\underline{Y_1}$ et $\underline{Y_2}$ ont la même partie réelle. En déduire que $\mathrm{Im}\left[\underline{Y_1}\right] = -\frac{C\omega}{2}$.
3. Calculer C, sachant que $r = 5\,\Omega$, $L = 20\,\mathrm{mH}$ et $f = 300\,\mathrm{Hz}$.

Solutions :

Ex1 : a) $u(t) = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}\, I_m \cos(\omega t + \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) - \frac{\pi}{3})$

b) $i(t) = \sqrt{1 + (RC\omega)^2}\,\frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \arctan(RC\omega))$

Ex2 : $U_m = 2{,}7\,\mathrm{V}$, $\varphi = 58°$.

Ex3 : $R = 100\,\Omega$, $L = 8{,}0\,\mathrm{mH}$, $C = 0{,}20\,\mu\mathrm{F}$

Ex4 : 2. $C = 0{,}24\,\mu\mathrm{F}$ 3. $I_C = 0{,}17\,\mathrm{A}$; $I_L = 0{,}20\,\mathrm{A}$; $I = 0{,}11\,\mathrm{A}$.

Ex5 : 1. $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$ 2. $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}$ 3. $V_m = \frac{F_0}{\alpha}$; $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

4. $V_0(\omega) = \frac{V_m}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$; 5. k_2

Ex6 : $\varphi(\omega) = -2\arctan(RC\omega)$

Ex7 : 1. $\alpha = C_S + C_P$; $\omega_r^2 = \frac{1}{LC_S}$; $\omega_a^2 = \frac{C_S + C_P}{LC_S C_P}$. 2. $f_a = 8{,}00 \cdot 10^5\,\mathrm{Hz}$; $f_r = 7{,}96 \cdot 10^5\,\mathrm{Hz}$.

3. résonance à f_r 4. antirésonance à f_a 5. $(f_a - f_r)/f_a = 0{,}5\,\%$.

Ex8 : 2. $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$; $Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{km}{2}}$ 3. $\underline{X} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}}$ 4. $X(t) \simeq -\frac{m}{2k}a(t)$.

Ex9 : $C = 28\,\mu\mathrm{F}$