

CHAPITRE

14

Filtrage linéaire passif

Un dispositif dont le comportement en régime sinusoïdal forcé dépend de la fréquence d'excitation, est appelé un **filtre**. Nous en avons étudié quelques exemples très simples, en électricité et en mécanique, au chapitre précédent. On trouve des filtres dans d'innombrables dispositifs électroniques ou mécaniques. Par exemple :

- Quand un capteur fournit un signal brut, il contient généralement un mélange d'information utile et de *bruit*, c'est-à-dire de fluctuations aléatoires. L'utilisation de filtres permet d'atténuer le bruit tout en conservant l'information utile (on dit que l'on améliore le *rapport signal sur bruit*).
- Divers systèmes mécaniques utilisent des filtres :
 - pour amortir les vibrations (suspension automobile, constructions parasismiques, stabilisation des miroirs de l'interféromètre LIGO pour l'observation des ondes gravitationnelles)
 - pour enregistrer des vibrations dans des bandes de fréquence bien précises (sismomètre).

On cherche ici à étudier les filtres de manière systémique, en les considérant comme des blocs *entrée/sortie*. On impose une excitation en entrée (tension imposée par un générateur ou bien force extérieure) et on obtient une réponse en sortie (sous la forme d'une tension, d'un déplacement, d'une vitesse, etc).



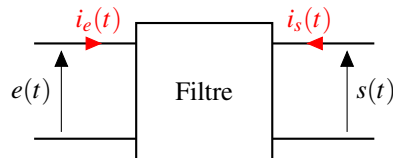
L'objectif principal de ce chapitre consiste à étudier le comportement d'un filtre lorsqu'il est soumis à une excitation **qui contient plusieurs composantes de fréquences différentes**. Il s'agit notamment de comprendre pourquoi certaines composantes peuvent être "transmises" par le filtre tandis que d'autres sont "coupées".

1 Propriétés générales et classification des filtres

Dans un premier temps on étudie les propriétés générales des filtres en s'appuyant sur des montages électriques appelés *quadripôles*, pour lesquels les grandeurs d'entrée et de sortie sont toutes les deux des **tensions**. On distingue les filtres en fonction des domaines de fréquences qu'ils sélectionnent et on présente un outil graphique qui illustre l'action d'un filtre en fonction de la fréquence de la tension d'entrée : le *diagramme de Bode*.

1.1 Quadripôle, fonction de transfert

Un quadripôle est un montage électronique qui possède deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. On note $e(t)$ la tension d'entrée et $s(t)$ la tension de sortie. On définit également les courants d'entrée $i_e(t)$ et de sortie $i_s(t)$ avec les conventions représentées sur la figure ci-dessous.



Dans toute la partie 1 nous supposons que la tension d'entrée est **sinusoïdale** de pulsation ω quelconque : $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$.

Si le filtre est **linéaire**, c'est-à-dire que la relation entre $s(t)$ et $e(t)$ s'écrit dans l'espace réel sous la forme d'une équation différentielle linéaire, alors la tension de sortie est elle aussi sinusoïdale, de même pulsation : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$.

Remarque : Un résistor, un condensateur ou une bobine sont des composants linéaires. Tout filtre constitué uniquement avec des composants de cette liste est un filtre linéaire.

Fonction de transfert

Nous étudions le comportement des filtres en régime forcé, en adoptant la notation complexe. On note respectivement \underline{E} et \underline{S} les amplitudes complexes associées aux tensions $e(t)$ et $s(t)$. La fonction de transfert d'un filtre est définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

Il s'agit d'une grandeur **sans dimension**. On la note généralement comme une fonction de la variable $j\omega$.

1.2 Gain, phase

La fonction de transfert d'un filtre peut s'écrire sous la forme : $\underline{H} = Ge^{j\varphi}$, avec :

- $G = |\underline{H}|$ le **gain** du filtre (sans unité) ;
- $\varphi = \arg(\underline{H})$ la **phase** du filtre (unité SI : **radians**).

Très concrètement le gain $G(\omega)$ indique l'action du filtre sur l'**amplitude** du signal d'entrée tandis que la phase $\varphi(\omega)$ indique son action sur la **phase à l'origine** du signal d'entrée.

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m} \implies S_m = G(\omega)E_m$$

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}) = \varphi_s - \varphi_e \implies \varphi_s = \varphi_e + \varphi(\omega)$$

Ainsi, pour une tension d'entrée $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ sinusoïdale, de pulsation ω donnée, et un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ connus, la tension de sortie s'obtient sous la forme suivante :

$$s(t) = G(\omega)E_m \cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega))$$

On peut également résumer les choses de la façon suivante :

Action d'un filtre sur un signal d'entrée sinusoïdal

Un filtre agit sur une tension d'entrée sinusoïdale de pulsation ω en :

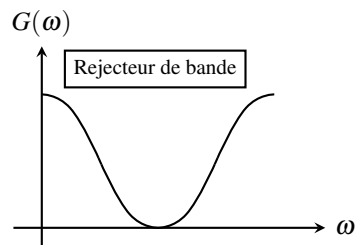
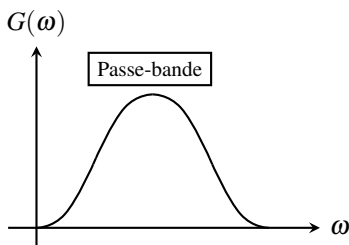
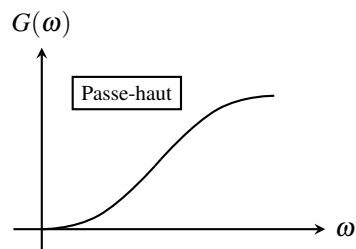
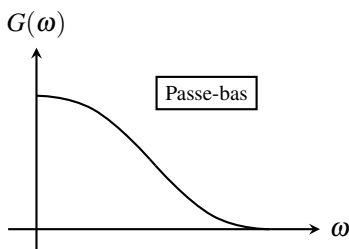
- multipliant l'amplitude par $G(\omega)$;
- ajoutant $\varphi(\omega)$ à la phase à l'origine.

1.3 Nature d'un filtre

On classe les filtres en fonction des fréquences qu'ils sélectionnent :

- un filtre *passé-bas* transmet les basses fréquences et atténue les hautes fréquences ;
- un filtre *passé-haut* transmet les hautes fréquences et atténue les basses fréquences ;
- un filtre *passé-bande* transmet les signaux dans un intervalle de fréquence fini et atténue le reste ;
- un filtre *rejetteur de bande* atténue les signaux dans un intervalle de fréquence fini et transmet le reste.

On illustre ces propriétés de manière graphique en représentant les variations du gain G avec la pulsation.



1.4 Ordre d'un filtre

La fonction de transfert d'un filtre linéaire s'écrit sous la forme d'un rapport de deux polynômes de la variable $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_n (j\omega)^n}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_p (j\omega)^p}$$

L'ordre d'un filtre correspond **au degré du polynôme situé au dénominateur**. Par exemple :

- un filtre de fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ est d'ordre 1 ;
- un filtre de fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$ est d'ordre 2.

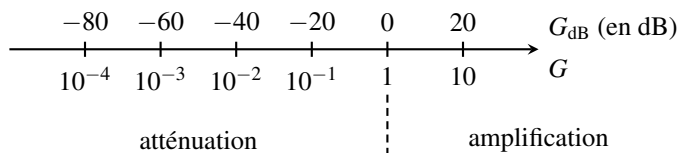
1.5 Diagramme de Bode

1.5.1 Gain en décibels

On définit le gain en décibels de la manière suivante :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log G = 20 \log (|\underline{H}|)$$

Il s'agit d'une grandeur sans dimension qui s'exprime en **décibels** (dB).



1.5.2 Diagramme de Bode en gain / en phase

Un diagramme de Bode est une représentation graphique du comportement du filtre en fonction de la fréquence. Il se décline en deux graphes :

- le graphe G_{dB} en fonction de $\log(\omega)$ s'appelle *diagramme de Bode en gain* ;
- le graphe φ en fonction de $\log(\omega)$ s'appelle *diagramme de Bode en phase*.

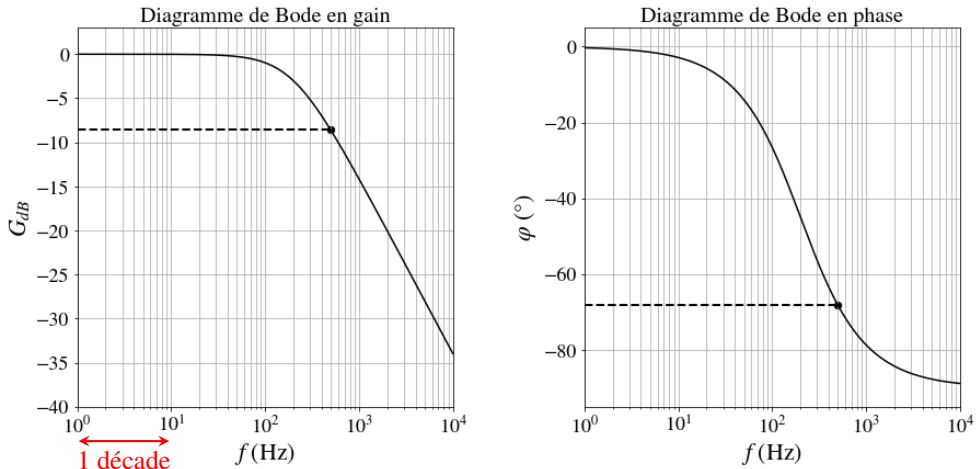
Le diagramme de Bode en gain est logarithmique sur les deux axes. Il présente l'avantage de montrer le comportement du filtre sur un large intervalle de fréquence, et permet de représenter de façon lisible aussi bien les faibles atténuations que les fortes atténuations.

On appelle *décade* un intervalle unitaire sur l'axe des abscisses. Sur une décade $\log(\omega)$ varie d'une unité, ce qui revient à dire que la pulsation **varie d'un facteur dix**. Une décade correspond donc à un intervalle sur lequel la pulsation varie du simple au décuple.

Remarque : En abscisse on remplace parfois $\log(\omega)$ par $\log(f)$ ou encore $\log(\omega/\omega_0)$ avec ω_0 une pulsation caractéristique du système étudié.

1.5.3 Exemple de lecture d'un diagramme de Bode

On considère un filtre dont le diagramme de Bode a l'allure ci-dessous. Pour faciliter la lecture on a remplacé l'échelle logarithmique en abscisses par une échelle **semi-logarithmique**.



Nature du filtre : On reconnaît sur le diagramme de Bode en gain que :

- les basses fréquences sont transmises sans atténuation ($G_{dB} \simeq 0 \iff G \simeq 1$).
- au-delà d'une certaine fréquence (appelée *fréquence de coupure*, voir paragraphe suivant), les signaux sont de plus en plus atténués à mesure que la fréquence augmente.

Ce filtre transmet les BF et atténue les HF ; il s'agit d'un filtre **passes-bas**.

Lecture du gain et de la phase pour une fréquence donnée : On se place arbitrairement à la fréquence $f = 500\text{ Hz}$ et on mesure sur le diagramme de Bode les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} G_{dB}(500\text{ Hz}) = -8,5\text{ dB} \\ \varphi = -68^\circ \end{cases}$$

Pour déterminer le gain on inverse la relation qui définit le gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log G \iff G = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} = 10^{-\frac{8,5}{20}} = 0,38$$

À $f = 500\text{ Hz}$ ce filtre a un gain $G(500\text{ Hz}) = 0,38$ et une phase $\varphi(500\text{ Hz}) = -68^\circ$.

Application 1

On impose à l'entrée du filtre précédent une tension $e(t) = E_m \cos(2\pi ft + \varphi_e)$, avec $E_m = 5,0\text{ V}$, $f = 2,0\text{ kHz}$ et $\varphi_e = 40^\circ$.

Mesurer le gain et la phase du filtre sur le diagramme de Bode ci-dessus, puis calculer l'amplitude S_m et la phase à l'origine φ_s de la tension de sortie (voir paragraphe 1.2).

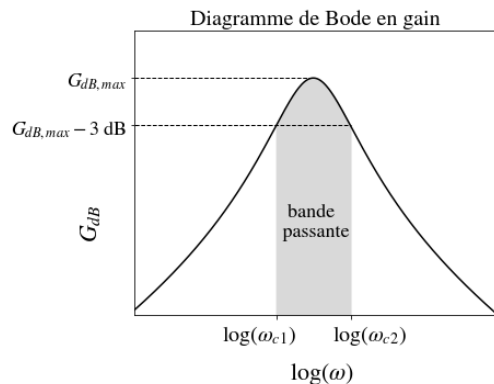
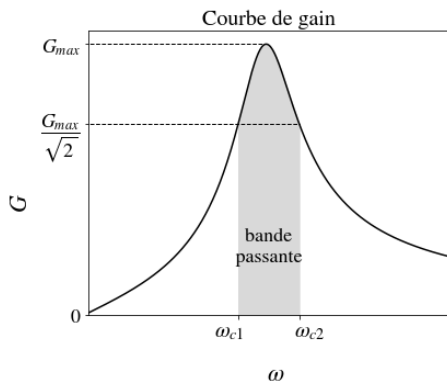
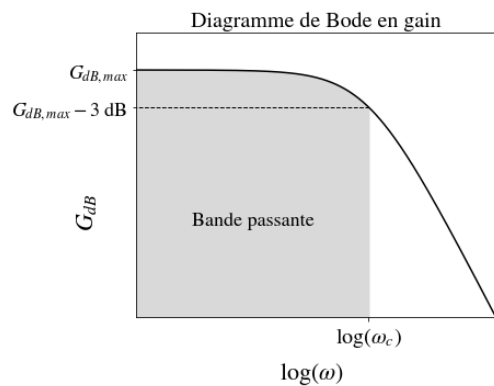
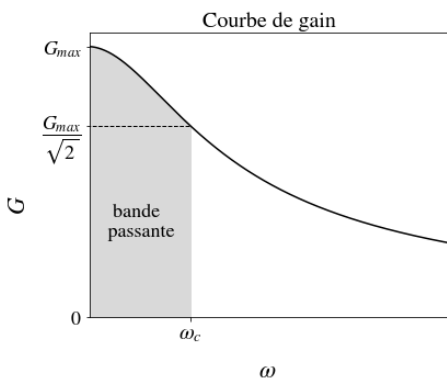
1.6 Pulsation de coupure, bande passante

On considère un filtre de gain maximal G_{\max} .

On appelle *pulsation de coupure* une pulsation ω_c pour laquelle : $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.

On appelle *bande passante* l'intervalle des pulsations sur lequel : $G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.

Remarque : En termes de gain en décibels : $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,\max} - 3 \text{ dB}$ (voir illustrations ci-dessous avec un filtre passe-bas et un filtre passe-bande).



1.7 Filtre passif, filtre actif

Un composant électronique est *actif* s'il a besoin **d'être alimenté** pour fonctionner. Nous en verrons un exemple au prochain chapitre : *l'amplificateur linéaire intégré*.

Un composant *passif* fonctionne sans avoir besoin d'être alimenté. C'est par exemple le cas d'un résistor, d'un condensateur ou d'une bobine.

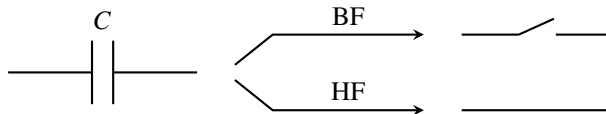
Un filtre qui contient au moins un composant actif est appelée *filtre actif*. Dans le cas contraire c'est un *filtre passif*. Dans ce chapitre on se restreint à l'étude des filtres passifs.

2 Étude analytique d'un filtre

2.1 Déterminer sans calcul la nature d'un filtre

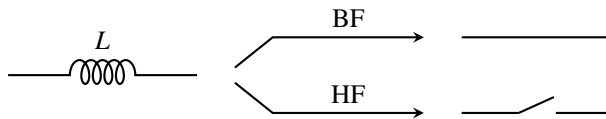
Comportements limites d'un condensateur

Dans la limite des basses fréquences (BF) un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert (impédance infinie) et dans la limite des hautes fréquences (HF) il se comporte comme un court-circuit (impédance nulle).



Comportements limites d'une bobine

En BF une bobine se comporte comme un court-circuit et en HF elle se comporte comme un interrupteur ouvert.



Ces comportements limites permettent d'étudier rapidement l'action d'un filtre sur des signaux BF ou HF, en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.

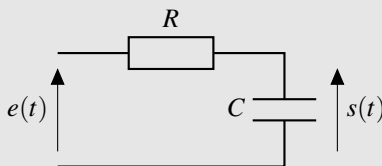
En résumé

- Faire un schéma équivalent du filtre en BF, en utilisant les comportements limites du condensateur et/ou de la bobine ;
- Si $s(t) = 0$ on conclut que les BF sont coupées. Si $s(t) \neq 0$ on conclut qu'elles sont transmises ;
- Répéter ces opérations en HF ;
- Conclure quant à la nature du filtre (voir tableau ci-dessous).

BF	Transmis	Coupé	Coupé	Transmis
HF	Coupé	Transmis	Coupé	Transmis
Nature	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande	Rejecteur de bande

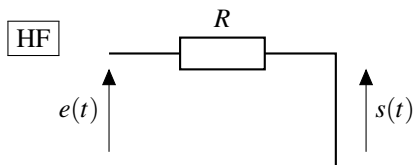
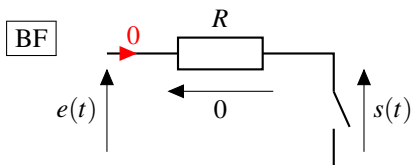
Exemple

Déterminer sans calcul la nature du filtre RC série ci-contre :



► **Faire un schéma équivalent en BF et HF**

On représente le schéma équivalent du filtre en BF et HF en s'appuyant sur les comportements limites du condensateur.

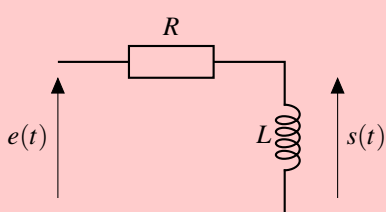
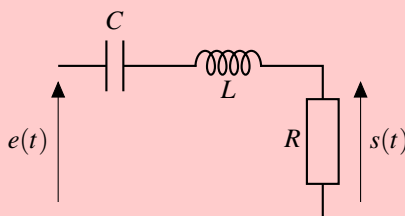
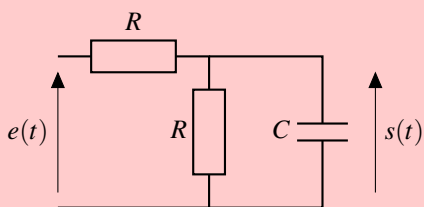
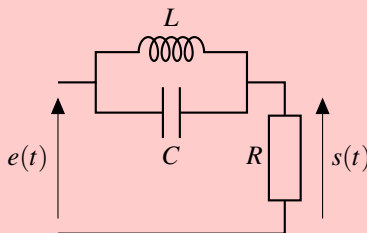


► **Déterminer si les signaux sont transmis ou coupés en BF et HF**

En BF le condensateur empêche le passage du courant. D'après la loi d'Ohm la tension aux bornes du résistor est nulle. Enfin d'après la loi des mailles $s(t) = e(t) \neq 0$. Ce filtre **transmet les BF**. En HF le condensateur se comporte comme un court-circuit donc $s(t) = 0$. Ce filtre **coupe les HF**. On conclut que ce filtre est un **passé-bas**.

Application 2

Déterminer sans calcul la nature des filtres ci-dessous :

Filtre F_a Filtre F_b Filtre F_c Filtre F_d

2.2 Tracer un diagramme de Bode asymptotique

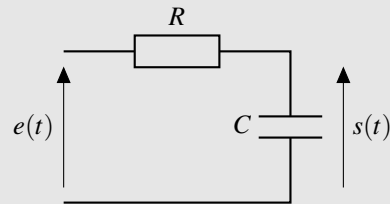
En résumé

- Calculer la fonction de transfert ;
- Identifier une pulsation caractéristique ω_0 . On appelle BF le domaine $\omega \ll \omega_0$ et HF le domaine $\omega \gg \omega_0$;
- Simplifier la fonction de transfert en BF et HF en identifiant, au numérateur et/ou au dénominateur, **le terme qui prédomine par rapport aux autres**.
- En déduire l'expression des asymptotes du diagramme de Bode en gain et/ou en phase.

Exemple 1

On considère le filtre RC série ci-contre :

1. Écrire sa fonction de transfert sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$ avec H_0 et ω_0 deux paramètres à déterminer.



2. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique (gain et phase).

► Calculer la fonction de transfert et identifier une pulsation caractéristique

On passe dans l'espace complexe et on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \underline{E} \iff \underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On identifie les deux paramètres : $H_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Remarque : H_0 s'appelle le *gain statique* (car $G(\omega = 0) = H_0$). Pour ce filtre on peut démontrer que ω_0 s'identifie à la **pulsation de coupure**.

► Déterminer les équations des asymptotes en BF et HF

On définit le domaine BF par $\omega \ll \omega_0$ (et HF par $\omega \gg \omega_0$). On simplifie la fonction de transfert dans ces deux domaines :

- en BF le terme 1 prédomine au dénominateur : $\underline{H} \simeq 1$
- en HF le terme $\frac{j\omega}{\omega_0}$ prédomine au dénominateur : $\underline{H} \simeq \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0}} = -\frac{j\omega_0}{\omega}$.

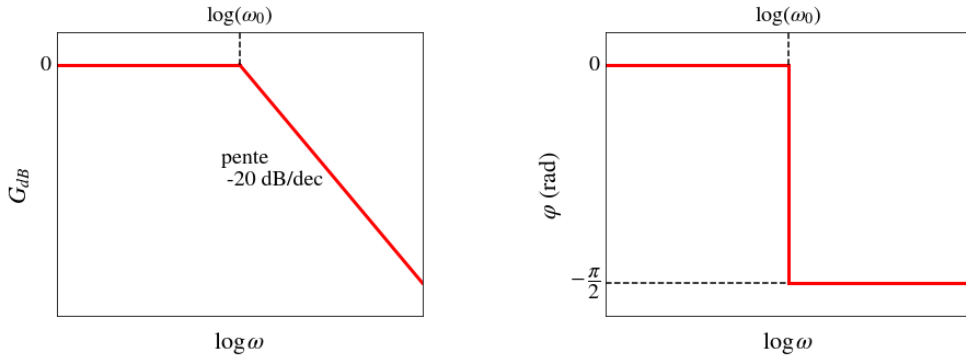
On détermine les équations des asymptotes :

$$\text{BF : } \underline{H}(j\omega) \simeq 1 \implies \begin{cases} G_{\text{dB}} \simeq 20 \log(1) = 0 \\ \varphi \simeq \arg(1) = 0 \end{cases}$$

En BF le diagramme de Bode en gain possède une **asymptote horizontale à 0 dB** tandis que le diagramme de Bode en phase possède une **asymptote horizontale à 0 rad**.

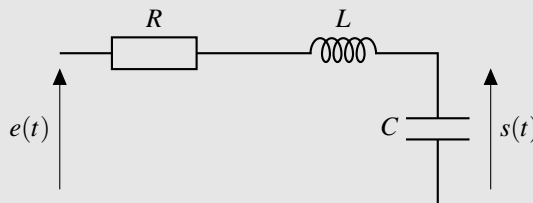
$$\text{HF : } \underline{H}(j\omega) \simeq -\frac{j\omega_0}{\omega} \implies \begin{cases} G_{\text{dB}} \simeq 20 \log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = 20 \log(\omega_0) - 20 \log(\omega) \\ \varphi \simeq \arg\left(-\frac{j\omega_0}{\omega}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

En HF le diagramme de Bode en gain possède une **asymptote oblique de pente -20 dB/dec** tandis que le diagramme de Bode en phase possède une **asymptote horizontale à $-\frac{\pi}{2}$ rad**.
On trace ci-dessous le diagramme de Bode asymptotique.



Exemple 2

On considère le filtre *RLC* série ci-dessous :



1. Écrire sa fonction de transfert sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ avec H_0 , ω_0 et Q trois paramètres à déterminer.

2. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique (gain et phase).

► **Calculer la fonction de transfert et identifier une pulsation caractéristique**

On passe dans l'espace complexe et on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On identifie : $\boxed{H_0 = 1}$. on résout le système suivant pour obtenir les deux autres paramètres :

$$\begin{cases} \frac{1}{Q\omega_0} = RC \\ \frac{1}{\omega_0^2} = LC \end{cases} \iff \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Remarque : pour ce filtre ω_0 et Q désignent respectivement la *pulsation propre* et le *facteur de qualité*.

► **Déterminer les équations des asymptotes en BF et HF**

Comme précédemment on définit le domaine BF par $\omega \ll \omega_0$ (et HF par $\omega \gg \omega_0$). On simplifie la fonction de transfert dans ces deux domaines :

- en BF le terme 1 prédomine au dénominateur : $\underline{H} \simeq 1$
- en HF le terme $-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ prédomine au dénominateur : $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$.

ATTENTION : Quand on simplifie une fonction de transfert en comparant les différents termes d'une somme on conserve **uniquement le terme prédominant** et on néglige **tous les autres**.

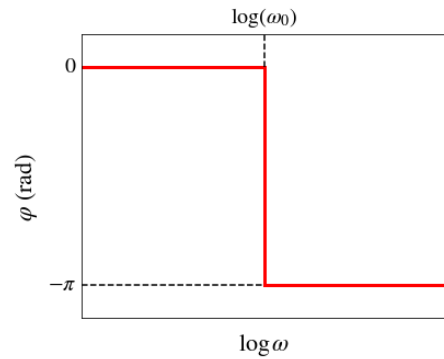
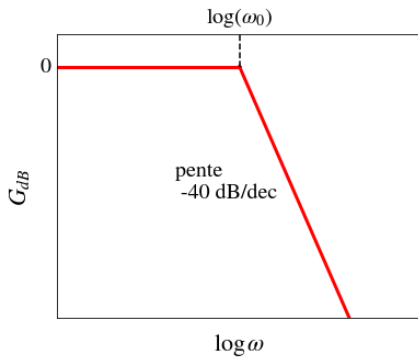
On détermine les équations des asymptotes :

$$\text{BF : } \underline{H}(j\omega) \simeq 1 \implies \begin{cases} G_{\text{dB}} \simeq 20\log(1) = 0 \\ \varphi \simeq \arg(1) = 0 \end{cases}$$

En BF le diagramme de Bode en gain possède une **asymptote horizontale à 0 dB** tandis que le diagramme de Bode en phase possède une **asymptote horizontale à 0 rad**.

$$\text{HF : } \underline{H}(j\omega) \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \implies \begin{cases} G_{\text{dB}} \simeq 20\log\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = 40\log(\omega_0) - 40\log(\omega) \\ \varphi \simeq \arg\left(-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = -\pi \end{cases}$$

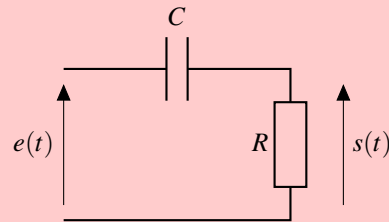
En HF le diagramme de Bode en gain possède une **asymptote oblique de pente -40 dB/dec** tandis que le diagramme de Bode en phase possède une **asymptote horizontale à $-\pi \text{ rad}$** . On trace ci-dessous le diagramme de Bode asymptotique.



Application 3

On considère le filtre RC série ci-contre :

- Écrire sa fonction de transfert sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_0}{j\omega}}$ avec H_0 et ω_0 deux paramètres à déterminer.



- Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique (gain et phase).

2.3 Justifier un comportement intégrateur ou dérivateur

Filtre pseudo-intégrateur

On dit qu'un filtre est *pseudo-intégrateur* s'il possède un domaine de fréquence sur lequel sa fonction de transfert vérifie :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{\text{Cste}}{j\omega}$$

En effet on peut alors écrire :

$$\underline{S} = \text{Cste} \frac{\underline{E}}{j\omega} \xrightarrow{\mathbb{R}} s(t) = \text{Cste} \int e(t) dt$$

La tension de sortie est proportionnelle à la primitive de la tension d'entrée, d'où le qualificatif de pseudo-intégrateur.

Filtre pseudo-dérivateur

On dit qu'un filtre est *pseudo-dérivateur* s'il possède un domaine de fréquence sur lequel sa fonction de transfert vérifie :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq \text{Cste} \times j\omega$$

En effet on peut alors écrire :

$$\underline{S} = \text{Cste} \times j\omega \underline{E} \xrightarrow{\mathbb{R}} s(t) = \text{Cste} \times \frac{de}{dt}$$

La tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée.

Exemple : On a étudié le filtre *RC* série passe-bas dans l'exemple 1 du paragraphe 2.2. On a vu qu'en HF ($\omega \gg \omega_0$) :

$$\underline{H} \simeq \frac{\omega_0}{j\omega} \iff \underline{S} = \omega_0 \times \frac{\underline{E}}{j\omega} \xrightarrow{\mathbb{R}} s(t) = \omega_0 \int e(t) dt$$

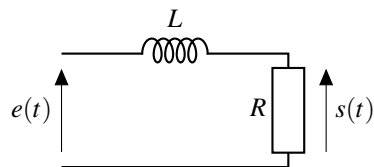
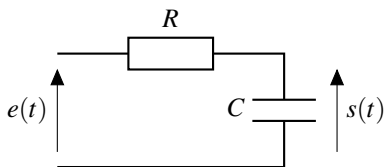
Ce filtre se comporte comme un intégrateur en HF.

Application 4

Justifier que le filtre de l'application 3 a un comportement dérivateur dans un domaine de fréquence à préciser.

3 Paramètres canoniques des filtres linéaires d'ordre 1 ou 2

3.1 Introduction



Les deux filtres ci-dessus ont des propriétés semblables. Ils ont en commun d'avoir une fonction de transfert qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \quad , \quad \text{avec } H_0 = 1 \text{ et, suivant le cas, } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ ou bien } \omega_0 = \frac{R}{L}$$

Cette expression commune, dite *canonique*, permet de généraliser l'étude des filtres en regroupant ceux qui ont des propriétés communes. En l'occurrence ces deux filtres sont des **passe-bas du premier ordre**.

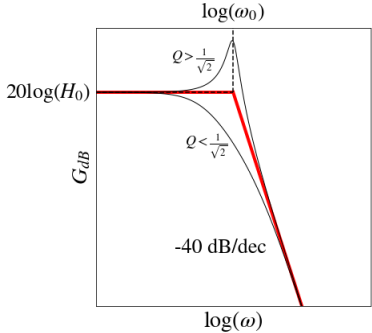
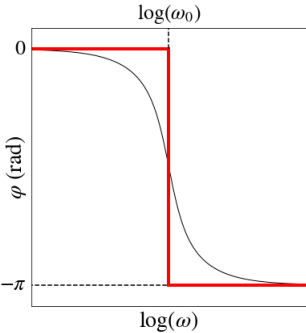
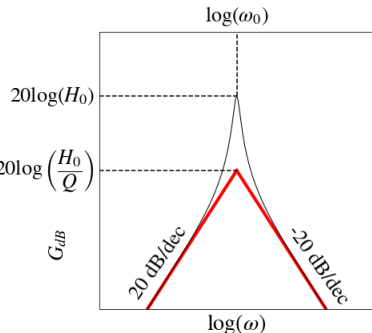
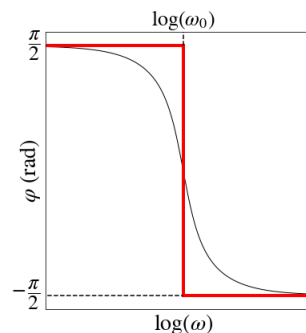
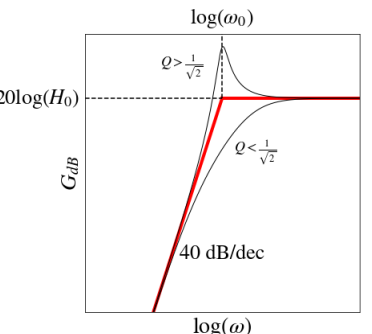
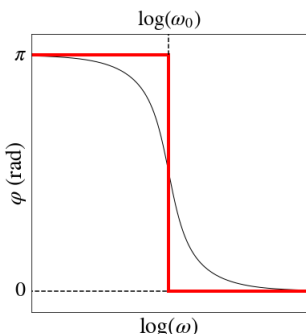
3.2 Propriétés générales des filtres linéaires d'ordre 1 et 2

Pour chacune des catégories du tableau ci-dessous on indique l'expression canonique de la fonction de transfert, un éventuel comportement intégrateur ou dérivateur en BF/HF. On présente également l'allure du diagramme de Bode, asymptotique et réel.

Il est à noter que la pulsation caractéristique ω_0 n'a pas la même signification physique pour les filtres d'ordre 1 ou d'ordre 2 :

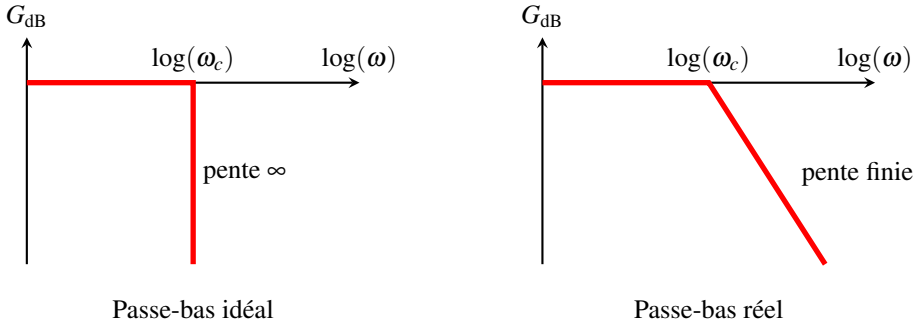
- Pour un filtre d'ordre 1, la pulsation ω_0 joue le rôle de **pulsation de coupure**.
- Pour un filtre d'ordre 2, la pulsation ω_0 correspond à la **pulsation propre du filtre** et ne s'identifie pas *a priori* à une pulsation de coupure.

Passe-bas ordre 1	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$	Intégrateur HF
Passe-haut ordre 1	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_0}{j\omega}}$	Dérivateur BF

<p>Passe-bas ordre 2</p>	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$	<p>Double intégrateur HF</p>
		
<p>Passe-bande ordre 2</p>	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	<p>Dérivateur BF Intégrateur HF</p>
		
<p>Passe-haut ordre 2</p>	$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_0}{j\omega Q} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$	<p>Double dérivateur BF</p>
		

3.3 Filtre idéal, filtre réel

On dit qu'un filtre est idéal s'il transmet uniformément toutes les signaux situés dans la bande passante et élimine parfaitement toutes ceux situées en dehors. Autrement dit un filtre idéal possède un gain constant dans la bande passante et un gain nul en dehors ($G_{dB} = -\infty$). On illustre cette propriété, sur l'exemple d'un filtre passe-bas, avec le diagramme de Bode en gain ci-dessous, à gauche.



En pratique un filtre réel n'élimine pas parfaitement mais plutôt progressivement les signaux, à mesure que l'on s'éloigne de la bande passante. Cela se traduit concrètement, sur le diagramme de Bode en gain, par **une asymptote de pente finie dans le domaine d'atténuation** (contrairement au filtre idéal qui possède une pente infinie).

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre, de pente -20 dB/dec dans le domaine d'atténuation. On peut écrire en HF :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq -j \frac{H_0 \omega_0}{\omega} \implies \boxed{G(\omega) \propto \frac{\omega_0}{\omega}}$$

Pour un filtre passe-bas du deuxième ordre, dans le domaine d'atténuation :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq -\frac{H_0 \omega_0^2}{\omega^2} \implies \boxed{G(\omega) \propto \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Un filtre passe-bas du deuxième ordre atténue beaucoup plus efficacement les signaux en dehors de la bande passante qu'un filtre passe-bas du premier ordre. On peut démontrer que ce résultat se généralise à un filtre passe-bas d'ordre n quelconque. En dehors de la bande passante : $G(\omega) \propto \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^n$.

Ordre d'un filtre et qualité de l'atténuation

Plus la pente est forte dans le domaine d'atténuation et plus un filtre se rapproche du comportement idéal. Un filtre atténue d'autant plus efficacement les signaux en dehors de la bande passante que son ordre est élevé.

4 Action d'un filtre linéaire sur un signal d'entrée périodique de forme quelconque

4.1 Décomposition de Fourier et spectre d'un signal périodique

Décomposition de Fourier d'un signal périodique

Un signal périodique $s(t)$ de pulsation ω peut s'écrire comme une superposition de fonctions sinusoïdales dont les pulsations sont **des multiples entiers naturels de ω** .

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Le terme de rang 0 (c'est-à-dire le terme constant c_0) est appelé *composante continue* du signal.

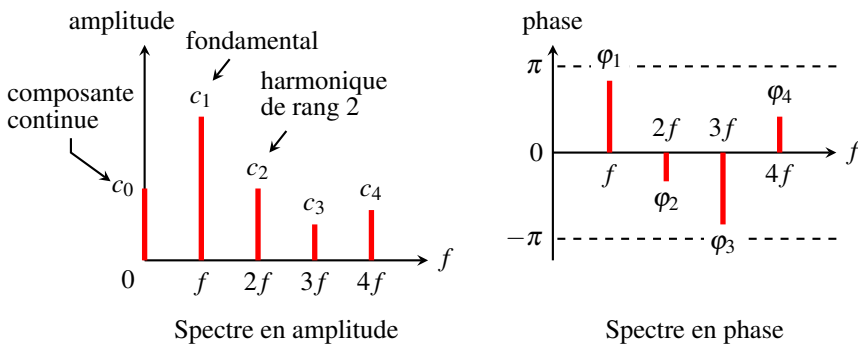
Le terme de rang 1 (c'est-à-dire $c_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$) est appelé *terme fondamental*. Il est de même pulsation que $s(t)$.

Un terme de rang $n \geq 2$ est appelé *harmonique de rang n* . Sa pulsation est n fois plus élevée que celle de $s(t)$.

Spectre en amplitude, spectre en phase

On appelle *spectre en amplitude* le graphe représentant les amplitudes c_n en fonction de la fréquence f . La composante continue est représentée sur l'axe des ordonnées, c'est-à-dire en $f = 0$.

On appelle *spectre en phase* le graphe représentant les phases à l'origine φ_n en fonction de la fréquence f . Par convention celles-ci sont définies sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$.



Le spectre d'un signal décrit son **contenu en fréquences**. C'est une donnée essentielle pour déterminer la façon dont un filtre linéaire traite ce signal.

4.2 Valeur moyenne d'un signal périodique

La valeur moyenne d'un signal de période T est définie par :

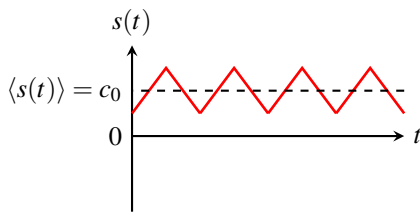
$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

On retient les valeurs moyennes classiques suivantes :

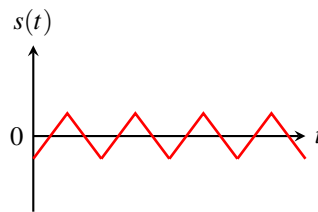
$$\forall \omega \neq 0 : \begin{cases} \langle \cos(\omega t) \rangle = \langle \sin(\omega t) \rangle = 0 \\ \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Valeur moyenne et décomposition de Fourier

La valeur moyenne d'un signal périodique $s(t)$ s'identifie à sa **composante continue** c_0 .



Signal avec composante continue



Signal sans composante continue

Valeur moyenne et mesure au multimètre

En mode DC ($\overline{\text{---}}$) un multimètre affiche **la valeur moyenne** $\langle s(t) \rangle$ du signal mesuré.

Valeur moyenne et GBF

Un GBF produit des signaux alternatifs de différentes formes : sinusoïde, rectangle, triangle. Il est possible d'ajouter une composante continue à ces signaux en appuyant sur le bouton **OFFSET** (qui signifie "composante continue" en anglais). Un autre bouton permet de choisir la valeur de cette composante continue (positive ou négative).

4.3 Valeur efficace d'un signal périodique

La valeur efficace d'un signal de période T est définie par :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, d'amplitude S_m , a pour valeur efficace :

$$s_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$$

Valeur efficace et mesure au multimètre

En mode AC (\sim) un multimètre affiche **la valeur efficace** s_{eff} du signal mesuré.

Valeur efficace et puissance

- La puissance reçue à l'entrée d'un quadripôle est proportionnelle au carré de la tension d'entrée efficace : $\mathcal{P}_e \propto e_{\text{eff}}^2$.
- La puissance fournie à la sortie d'un quadripôle est proportionnelle au carré de la tension de sortie efficace : $\mathcal{P}_s \propto s_{\text{eff}}^2$.

Remarque : La puissance associée à un signal $s(t)$ est égale à la somme des puissances associées à ses différentes composantes de Fourier. En termes mathématiques cela revient à dire que : $s_{\text{eff}}^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2}$.

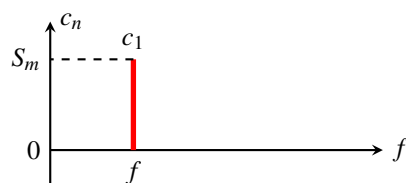
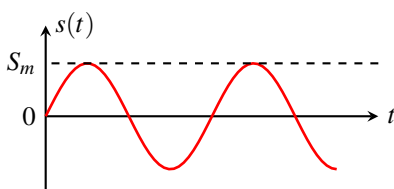
Remarque : Pour un filtre passif on a toujours $\mathcal{P}_s < \mathcal{P}_e$, c'est-à-dire qu'un tel filtre peut dissiper une partie de la puissance reçue en entrée mais ne peut pas en générer lui-même. À l'inverse un filtre actif, qui reçoit de l'énergie via une source d'alimentation, peut fournir en sortie une puissance supérieure à celle d'entrée.

4.4 Décomposition de Fourier des signaux classiques

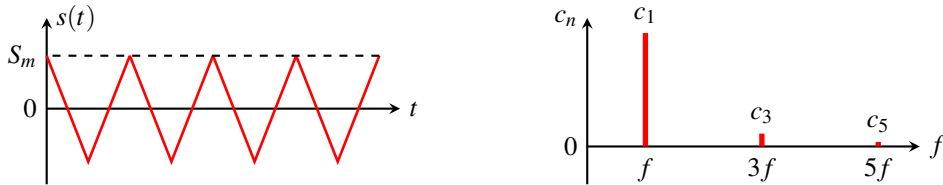
Dans ce paragraphe on considère uniquement des signaux **sans composante continue**, c'est-à-dire de valeur moyenne nulle.

4.4.1 Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ne contient, par définition, qu'une seule composante de fréquence f !



4.4.2 Signal triangulaire



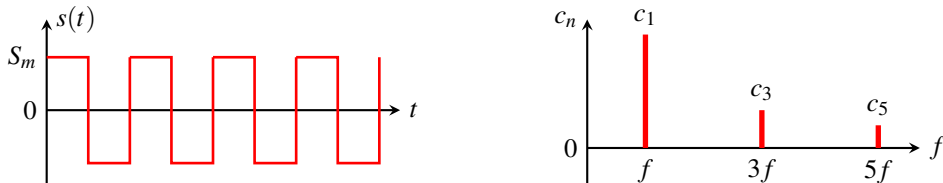
La décomposition de Fourier du signal triangulaire ci-dessus, d'amplitude S_m , est :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{8S_m}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega t) \\
 &= \frac{8S_m}{\pi^2} \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Spectre en amplitude d'un signal triangulaire

- Le spectre en amplitude d'un signal triangulaire contient uniquement des harmoniques **de rang impair** ;
- L'amplitude des harmoniques décroît en $1/n^2$, avec n le rang de l'harmonique.

4.4.3 Signal rectangulaire (ou créneau)



La décomposition de Fourier du signal rectangulaire ci-dessus, d'amplitude S_m , est :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{4S_m}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cos((2k+1)\omega t) \\
 &= \frac{4S_m}{\pi} \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Spectre en amplitude d'un signal rectangulaire

- Le spectre en amplitude d'un signal rectangulaire contient uniquement des harmoniques **de rang impair** ;
- L'amplitude des harmoniques décroît en $1/n$, avec n le rang de l'harmonique.

4.5 Filtres linéaires et principe de superposition

Principe de superposition

La réponse d'un filtre linéaire à une somme d'excitations est égale à la somme des réponses à chaque excitation individuelle.

Autrement dit, pour tout filtre linéaire F :

$$\text{si } \begin{cases} e_1(t) \xrightarrow{F} s_1(t) \\ e_2(t) \xrightarrow{F} s_2(t) \end{cases} \quad \text{alors} \quad e_1(t) + e_2(t) \xrightarrow{F} s_1(t) + s_2(t)$$

Prenons l'exemple du paragraphe 1.5.3 et supposons que la tension d'entrée soit :

$$e(t) = E_1 \cos(2\pi f_1 t) + E_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

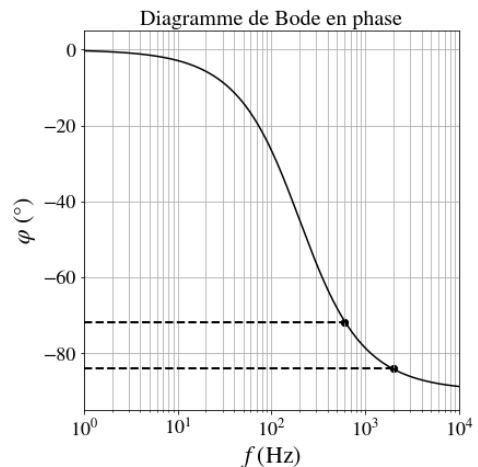
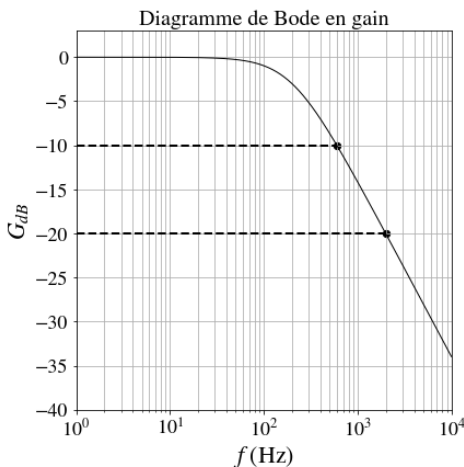
avec $E_1 = 5 \text{ V}$, $E_2 = 3 \text{ V}$, $f_1 = 600 \text{ Hz}$ et $f_2 = 2 \text{ kHz}$. Comme on l'a vu dans la première partie la réponse du filtre à chacune des deux composantes sinusoïdales individuelle est :

$$\begin{cases} E_1 \cos(2\pi f_1 t) \xrightarrow{F} G(f_1) E_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi(f_1)) \\ E_2 \cos(2\pi f_2 t) \xrightarrow{F} G(f_2) E_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi(f_2)) \end{cases}$$

On conclut que :

$$e(t) \xrightarrow{F} s(t) = G(f_1) E_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi(f_1)) + G(f_2) E_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi(f_2))$$

Il reste à mesurer le gain et la phase du filtre pour les fréquences $f_1 = 600 \text{ Hz}$ et $f_2 = 2 \text{ kHz}$.



$$\begin{cases} G_{dB}(f_1) = -10 \text{ dB} \implies G(f_1) = 10^{-\frac{10}{20}} = 0,32 \\ G_{dB}(f_2) = -20 \text{ dB} \implies G(f_2) = 10^{-1} = 0,1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi(f_1) = -72^\circ \\ \varphi(f_2) = -84^\circ \end{cases}$$

On conclut que : $s(t) = S_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + S_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$, avec :

$$\begin{cases} S_1 = G(f_1)E_1 = 1,6 \text{ V} \\ \varphi_1 = \varphi(f_1) = -72^\circ \end{cases} ; \begin{cases} S_2 = G(f_2)E_2 = 0,3 \text{ V} \\ \varphi_2 = \varphi(f_2) = -84^\circ \end{cases}$$

Application 5

Un filtre a pour fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{j\omega}}$, avec $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$.

1. Quel est la nature de ce filtre ? Quelle est sa fréquence de coupure ? Tracer l'allure de son diagramme de Bode asymptotique.
2. Déterminer le gain $G(\omega)$ et la phase $\varphi(\omega)$ de ce filtre pour une pulsation ω quelconque.
3. On impose la tension d'entrée $e(t) = E_0 + E_1 \cos(2\pi ft)$, avec $f = 5 \text{ kHz}$.

Au vu du diagramme de Bode asymptotique, que peut-on prévoir quant à l'action du filtre sur la composante continue E_0 ? Sur la composante à $f = 5 \text{ kHz}$?

Vérifier en déterminant numériquement la tension de sortie $s(t)$.

Indication : La réponse d'un filtre à une composante continue est :

$$E_0 \xrightarrow{F} S_0 = G(0)E_0$$

4.6 Prévoir qualitativement l'action d'un filtre grâce au diagramme de Bode asymptotique

Le principe de superposition vu au paragraphe précédent est fondamental car il implique que pour étudier la réponse d'un filtre linéaire à un signal périodique de forme quelconque, il suffit de connaître la réponse de ce filtre **pour chacune des composantes sinusoïdales de sa décomposition de Fourier**. On va exploiter cette propriété sur un exemple.

En résumé

- Calculer la fonction de transfert ;
- Tracer le diagramme de Bode en gain asymptotique ;
- Déterminer, parmi les composantes spectrales du signal d'entrée, celles qui se trouvent dans la bande passante et celles qui se trouvent en dehors.
- Identifier un éventuel comportement intégrateur ou dérivateur dans un certain intervalle de fréquence.
- Analyser les informations précédentes pour proposer l'allure du signal de sortie.

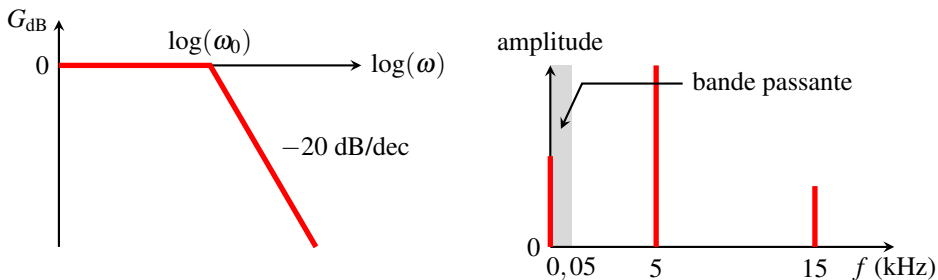
Exemple

Un filtre a pour fonction de transfert : $H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$, avec $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 50\text{Hz}$.

1. Quel est la nature de ce filtre ? Quelle est sa fréquence de coupure ? Tracer l'allure de son diagramme de Bode asymptotique.
2. On impose une tension d'entrée $e(t)$ rectangulaire, de moyenne $E_0 = 3\text{V}$, d'amplitude $E_1 = 1\text{V}$ et de fréquence $f = 5\text{kHz}$.
Tracer l'allure du signal de sortie $s(t)$. Justifier que ce filtre peut être qualifié de *moyenneur*.
3. En réalité le signal de sortie n'est pas tout à fait constant mais présente des oscillations triangulaires de faible amplitude autour de sa valeur moyenne. Justifier.

► **Tracer le diagramme de Bode en gain asymptotique**

1. On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure ω_0 , avec $H_0 = 1$. On trace ci-dessous (à gauche) l'allure du diagramme de Bode asymptotique en gain :

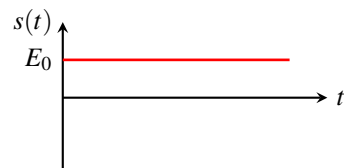
► **Situer les composantes spectrales par rapport à la bande passante**

2. On représente ci-dessus (à droite) le spectre en amplitude du signal ainsi que la bande passante. On constate que :

- La composante continue est située dans la bande passante (car on la place en $f = 0$). Celle-ci est transmise sans atténuation car $G(0) = 1$.
- La partie variable (contenant les fréquences $f, 3f, 5f$, etc) est située loin à l'extérieur de la bande passante car $f \gg f_0$.

► **Analyser l'action du filtre sur le signal d'entrée**

Le filtre transmet sans atténuer la composante continue E_0 et atténue fortement la partie variable du signal. On conclut que le signal de sortie $s(t)$ est **quasi-constant** : $s(t) \simeq E_0 = \langle e(t) \rangle$. La réponse du filtre correspond à la **valeur moyenne du signal d'entrée**, raison pour laquelle on peut le qualifier de "moyenneur".



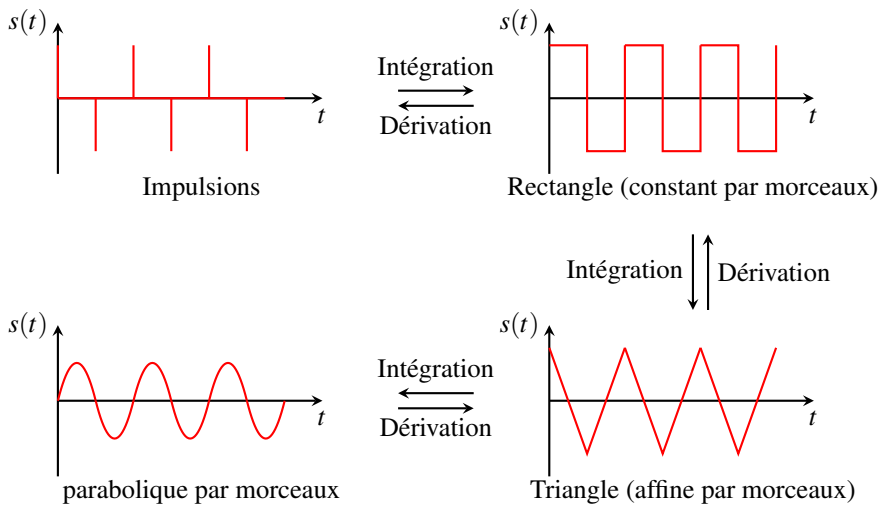
► **Identifier un comportement intégrateur ou dérivateur**

3. Le signal de sortie n'est pas tout à fait constant car la partie variable du signal d'entrée, bien qu'atténuée fortement, **n'est pas totalement coupée par le filtre**. Dans le domaine HF :

$$\underline{H} \simeq \frac{\omega_0}{j\omega} \xrightarrow{\mathbb{R}} s(t) \simeq \omega_0 \int e(t) dt$$

Ce filtre présente un caractère intégrateur en HF, or la primitive d'un signal rectangulaire (fonction constante par morceaux) est un signal triangulaire (fonction affine par morceaux). C'est pourquoi le signal de sortie est composée de la superposition d'une composante continue E_0 et **d'un triangle de faible amplitude**.

Intégration et dérivation temporelle des signaux classiques



Application 6

Un filtre a pour fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$, avec comme paramètres $Q = 30$ et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \text{ kHz}$.

1. Quel est la nature de ce filtre ? Calculer la largeur de la bande passante puis tracer l'allure de son diagramme de Bode asymptotique en gain.
2. On impose une tension d'entrée $e(t)$ rectangulaire d'amplitude $E_1 = 1 \text{ V}$ et de fréquence $f = 1 \text{ kHz}$. Tracer l'allure du signal de sortie $s(t)$. Justifier que ce montage peut être qualifié de *tripleur de fréquence*.