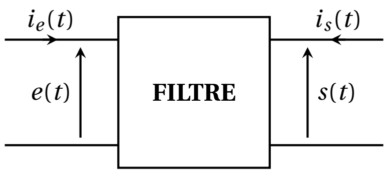
Chapitre 14 : Filtrage linéaire

1 Notion de filtre

1.1 Définition



Un filtre est un quadripôle conçu pour transmettre sélectivement les différentes composantes spectrales d'un signal d'entrée.

- Un **filtre passif** est un filtre qui n'est composé que de dipôles passifs (condensateurs, bobines, résistances,...).
- Un **filtre actif** est un filtre composé de dipôles actifs, c'est-à-dire alimentés par une source extérieure (amplificateur linéaire intégré (ALI), transistors,...)

1.2 Fonction de transfert, gain, phase

Dans un filtre constitué de dipôles (actifs ou passifs) linéaires, et à condition que tous les générateurs, s'il y en a plusieurs, aient la même fréquence, on peut appliquer la méthode complexe.

La fonction de transfert $\underline{H}$ et **le gain** G du filtre sont définis par :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}} \qquad \boxed{G(\omega) = \left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right| = \left|\frac{\underline{S}}{\underline{E}}\right|}$$

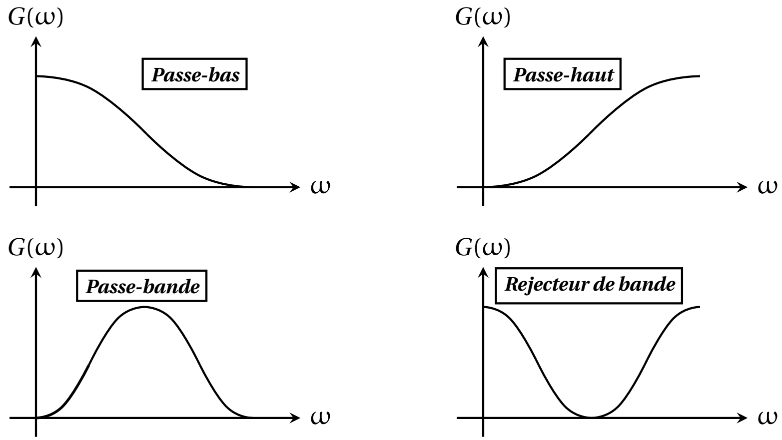
Rq : $\underline{H}$ et G sont des grandeur sans dimension. G est une grandeur positive. Lorsque $G > 1$, on dit que la tension est **amplifiée** par le filtre, tandis que lorsque $G < 1$, on dit que la tension est **atténuée**.

Par définition, l'argument de la fonction de transfert est égal à l'avance de phase de $s(t)$ par rapport à $e(t)$.

$$\boxed{\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(\underline{S}) - \arg(\underline{E}) = \varphi_s - \varphi_e}$$

1.3 Types de filtres

Les filtres linéaires peuvent être rangés dans quatre grandes catégories, selon la manière dont ils transmettent les différentes fréquences du signal d'entrée.



Pour les circuits linéaires, la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle de la variable $\mathrm{j}\omega$.

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{N}(\mathrm{j}\omega)}{\underline{D}(\mathrm{j}\omega)}$$

Où $\underline{N}(\mathrm{j}\omega)$ et $\underline{D}(\mathrm{j}\omega)$ sont deux polynômes de la variable $\mathrm{j}\omega$.

On définit alors **l'ordre d'un filtre** comme étant égal au degré du polynôme $\underline{D}(\mathrm{j}\omega)$.

1.4 Diagramme de Bode

On définit le **gain en décibel** d'un filtre par la quantité :

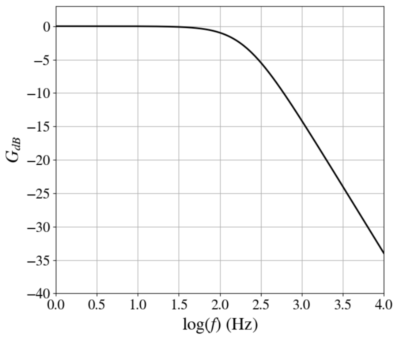
$$\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 20\log(G) = 20\log(|\underline{H}|)}$$

Le diagramme de Bode d'un filtre est constitué de deux graphiques:

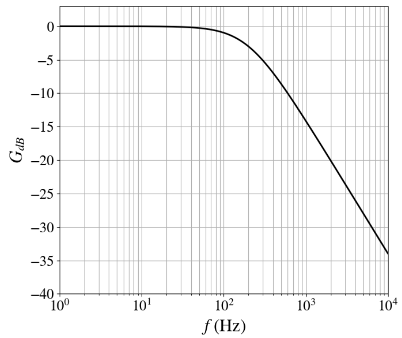
- Le **diagramme de Bode en gain** est le diagramme $G_{\mathrm{dB}} = f(\log(\omega))$
- Le **diagramme de Bode en phase** est le diagramme $\varphi = f(\log(\omega))$

Le diagramme de Bode est caractéristique du filtre. C'est un diagramme en échelle logarithmique. En abscisse, il est gradué en **décades**.

Rq : Quand un diagramme indique en abscisses les valeurs de $\log f$ on dit qu'il est en échelle **logarithmique**. Quand il indique en abscisses les valeurs de f sur une échelle logarithmique on dit qu'il est en échelle **semi-logarithmique**.



échelle logarithmique



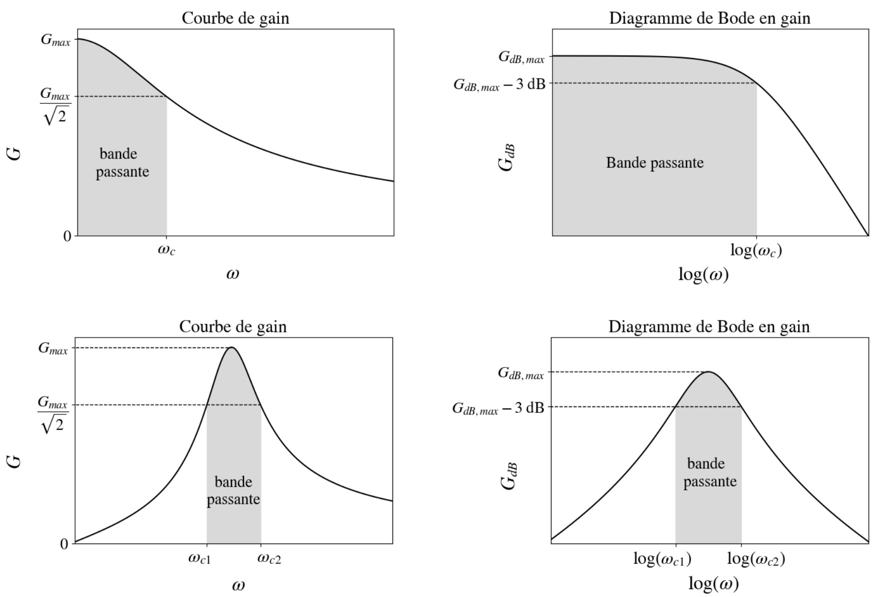
échelle semi-logarithmique

1.5 Pulsation de coupure, bande passante

On appelle *pulsation de coupure* une pulsation ω_c pour laquelle : $\boxed{G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}}$.

On appelle *bande passante* l'intervalle des pulsations sur lequel : $\boxed{G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}}$.

Remarque : En termes de gain en décibels : $G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = G_{\mathrm{dB,max}} - 3\,\mathrm{dB}$ (voir illustrations ci-dessous avec un filtre passe-bas et un filtre passe-bande).

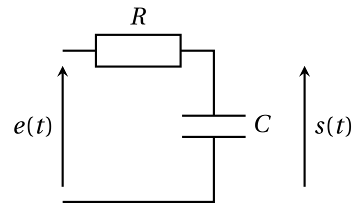


2 Filtres passifs

IMPORTANT : Dans l'intégralité de ce paragraphe, on supposera toujours le courant de sortie $\underline{I_s} = 0$ (sortie à vide).

2.1 Filtre RC passe-bas du premier ordre

On illustre le comportement des filtres passe-bas du premier ordre en prenant comme exemple le filtre suivant, constitué d'une résistance et d'un condensateur associés en série.



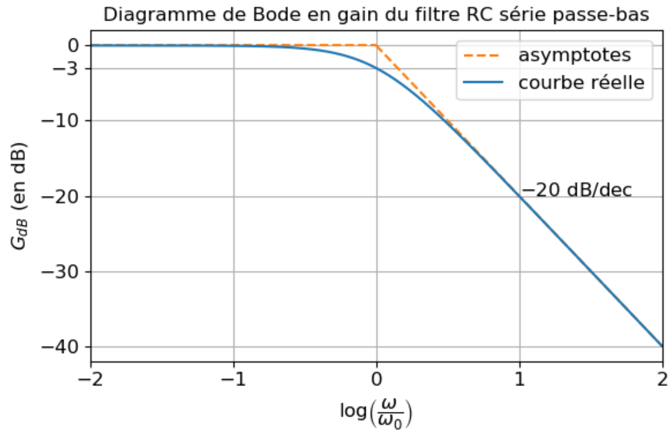
2.1.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit sous la forme canonique :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}}}$$

Où H_0 représente le gain maximal du filtre et ω_c est la **pulsation de coupure**. Pour le filtre RC passe-bas, $H_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

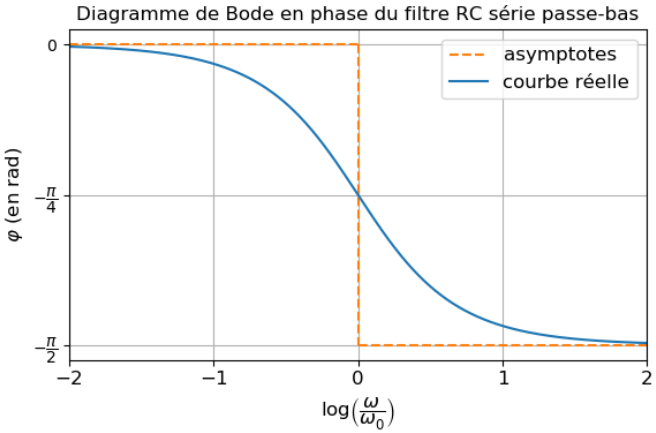
2.1.2 Diagramme de Bode en gain



- Le gain en décibel est maximal en BF ($x \ll 1$) et vaut 0 dB (correspond à un gain $G = 1$).
- L'atténuation en HF ($x \gg 1$) est de $20\,\mathrm{dB/dec}$.
- La pulsation de coupure vaut ω_0, la bande-passante du filtre est donc $[0, \omega_0]$.
- À la pulsation de coupure, $G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = G_{\mathrm{dB,max}} - 3\,\mathrm{dB}$.

2.1.3 Diagramme de Bode en phase

En BF, $s(t)$ et $e(t)$ sont en phase. En HF, ils sont en quadrature de phase ($s(t)$ possède un retard de $\pi/2$ sur $e(t)$). À la fréquence de coupure, le déphasage vaut $-\pi/4$.



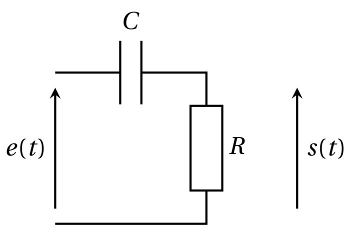
2.1.4 Caractère intégrateur du filtre en HF

Un filtre passe-bas du premier ordre se comporte comme un intégrateur en HF, c'est-à-dire pour toutes les composantes harmoniques du signal d'entrée de fréquence très supérieure à la fréquence de coupure du filtre. Dans le cas du filtre RC passe-bas, le filtre effectue en HF l'opération suivante :

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{RC}\int e(t)\mathrm{d}t}$$

2.2 Filtre RC passe-haut du premier ordre

On illustre le comportement des filtres passe-haut du premier ordre en prenant comme exemple le filtre suivant, constitué d'une résistance et d'un condensateur en série.



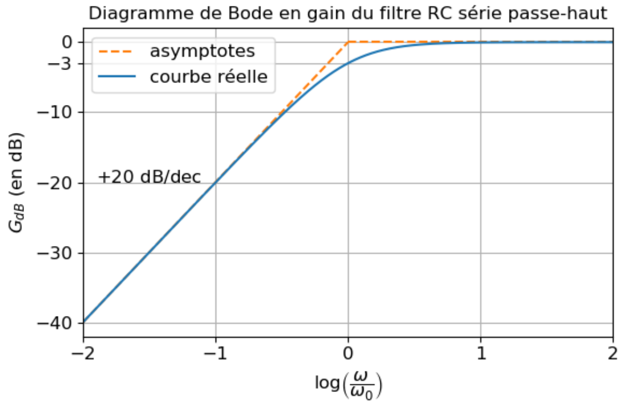
2.2.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre s'écrit sous la forme canonique :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_0}{\mathrm{j}\omega}}}$$

Où H_0 représente le gain maximal du filtre. Pour le filtre RC passe-haut, $H_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

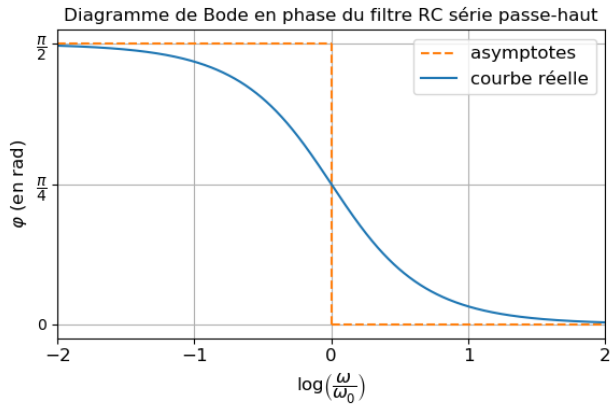
2.2.2 Diagramme de Bode en gain



- Le gain en décibel est maximal en HF et vaut 0 dB (correspond à un gain $G = 1$).
- L'atténuation en BF est de 20 dB/dec.
- La pulsation de coupure vaut ω_0, la bande-passante du filtre est donc $[\omega_0, \infty[$.
- À la pulsation de coupure, $G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = G_{\mathrm{dB,max}} - 3\,\mathrm{dB}$.

2.2.3 Diagramme de Bode en phase

En BF, $s(t)$ et $e(t)$ sont en quadrature de phase. En HF, ils sont en phase. À la pulsation de coupure, le déphasage vaut $\pi/4$.



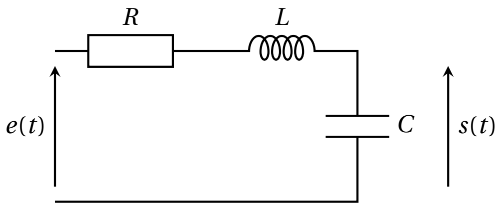
2.2.4 Caractère dérivateur du filtre en BF

Un filtre passe-haut du premier ordre se comporte comme un dérivateur en BF. Dans le cas du filtre RC passe-haut, le filtre effectue en BF l'opération suivante :

$$\boxed{s(t) = RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$$

2.3 Filtre RLC passe-bas du deuxième ordre

On illustre le comportement des filtres passe-bas du deuxième ordre en prenant comme exemple le filtre suivant, constitué d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine placée en série.



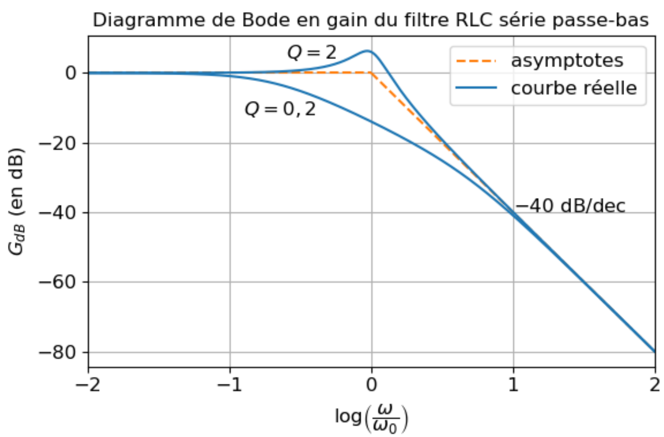
2.3.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du deuxième ordre s'écrit sous la forme canonique :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \dfrac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

avec ω_0 la pulsation propre du système et Q est le facteur de qualité. Pour le filtre RLC série passe-bas, $H_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

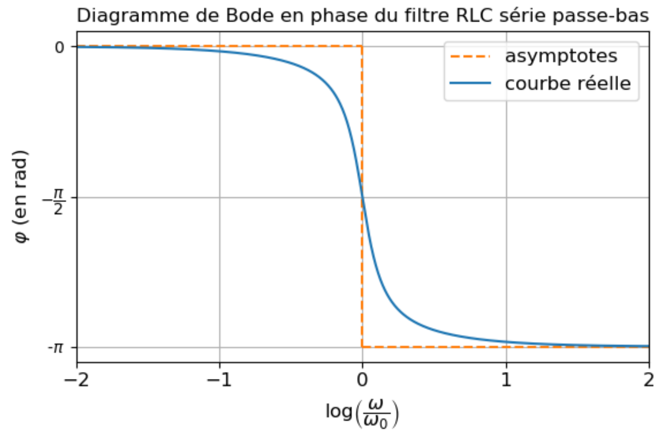
2.3.2 Diagramme de Bode en gain



- L'atténuation en HF est de 40 dB/dec.
- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors le gain est maximal quand $\omega \longrightarrow 0$.
- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors le système entre en résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

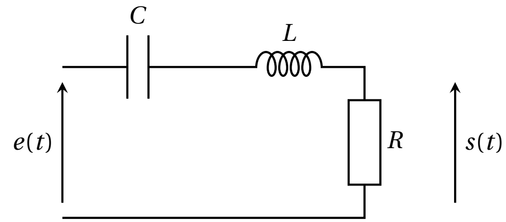
2.3.3 Diagramme de Bode en phase

En BF, $s(t)$ et $e(t)$ sont en phase. En HF, ils sont en opposition de phase. Pour $\omega = \omega_0$, ils sont en quadrature de phase.



2.4 Filtre RLC passe-bande du deuxième ordre

On illustre le comportement des filtres passe-bande du deuxième ordre en prenant comme exemple le filtre suivant, constitué d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine placée en série.



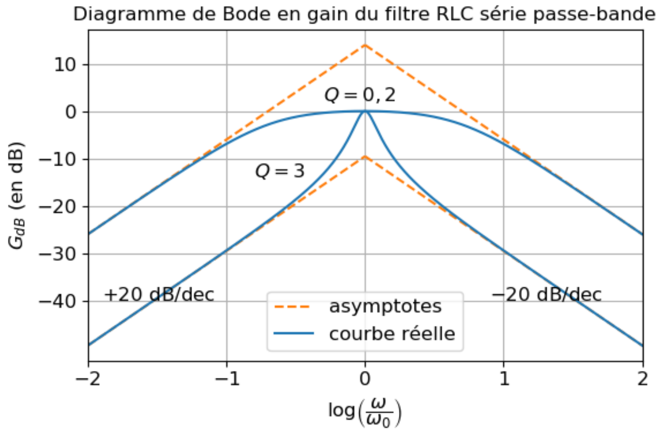
2.4.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du deuxième ordre s'écrit sous la forme canonique:

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

avec ω_0 la pulsation propre du système et Q est le facteur de qualité. Pour le filtre RLC série passe-bande, $H_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

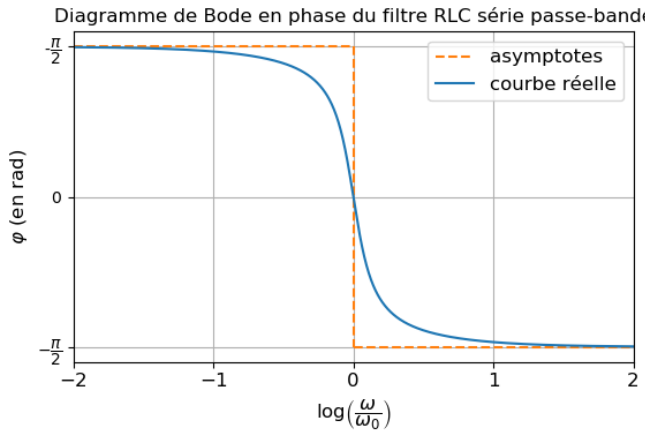
2.4.2 Diagramme de Bode en gain



- L'atténuation en BF et en HF est de 20 dB/dec.
- Il y a résonance en $\omega = \omega_0$, le gain vaut alors 0 dB ($G = 1$).
- Plus le facteur de qualité est grand et plus la résonance est aiguë, on dit que le filtre est **sélectif**. À l'inverse, plus le facteur de qualité est faible et plus la résonance devient plate. Le filtre est peu sélectif.

2.4.3 Diagramme de Bode en phase

En BF et en HF, $s(t)$ et $e(t)$ sont en quadrature de phase. Pour $\omega = \omega_0$, ils sont en phase.



3 Action d'un filtre linéaire sur un signal périodique

3.1 Décomposition en série de Fourier

Décomposition de Fourier d'un signal périodique

Un signal périodique $s(t)$ de pulsation ω peut s'écrire comme une superposition de fonctions sinusoïdales dont les pulsations sont **des multiples entiers naturels de** ω.

$$\boxed{s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n\right)}$$

Le terme de rang 0 (c'est-à-dire le terme constant c_0) est appelé *composante continue* du signal.

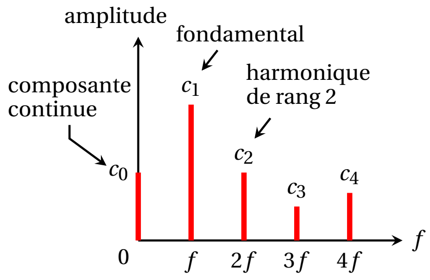
Le terme de rang 1 (c'est-à-dire $c_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$) est appelé *terme fondamental*. Il est de même pulsation que $s(t)$.

Un terme de rang $n \geq 2$ est appelé *harmonique de rang* n. Sa pulsation est n fois plus élevée que celle de $s(t)$.

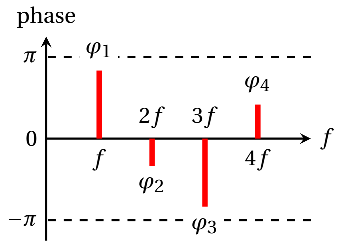
Spectre en amplitude, spectre en phase

On appelle *spectre en amplitude* le graphe représentant les amplitudes c_n en fonction de la fréquence f. La composante continue est représentée sur l'axe des ordonnées, c'est-à-dire en $f = 0$.

On appelle *spectre en phase* le graphe représentant les phases à l'origine φ_n en fonction de la fréquence f. Par convention celles-ci sont définies sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$.



Spectre en amplitude



Spectre en phase

Le spectre d'un signal décrit son **contenu en fréquences**. C'est une donnée essentielle pour déterminer la façon dont un filtre linéaire traite ce signal.

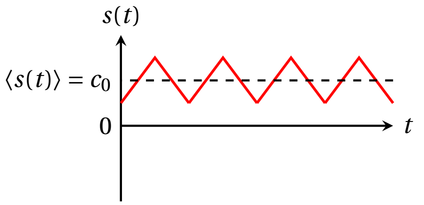
3.2 Valeur moyenne d'un signal périodique

La valeur moyenne d'un signal de période T est définie par : $\boxed{\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t}$.

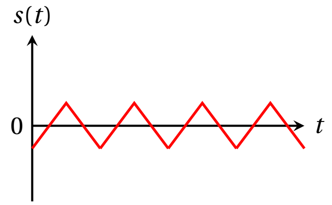
On retient les valeurs classiques suivantes : $\langle\cos(\omega t)\rangle = \langle\sin(\omega t)\rangle = 0$ et $\left\langle\cos^2(\omega t)\right\rangle = \left\langle\sin^2(\omega t)\right\rangle = \dfrac{1}{2}$.

Valeur moyenne et décomposition de Fourier

La valeur moyenne moyenne d'un signal périodique $s(t)$ s'identifie à sa **composante continue**.



Signal avec composante continue



Signal sans composante continue

Valeur moyenne et mesure au multimètre

En mode DC (⎓) un multimètre affiche **la valeur moyenne** $\langle s(t)\rangle$ du signal mesuré.

Valeur moyenne et GBF

Un GBF produit des signaux alternatifs de différentes formes : sinusoïde, rectangle, triangle. Il est possible d'ajouter une composante continue à ces signaux en appuyant sur le bouton **OFFSET** (qui signifie “composante continue” en anglais). Un autre bouton permet de choisir la valeur de cette composante continue (positive ou négative).

3.3 Valeur efficace d'un signal périodique

La valeur efficace d'un signal de période T est définie par : $\boxed{s_{\text{eff}} = \sqrt{\left\langle s^2(t)\right\rangle} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s^2(t)\,\mathrm{d}t}}$.

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal $s(t) = S_m\cos(\omega t + \varphi)$, d'amplitude S_m, a pour valeur efficace :

$$\boxed{s_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}}$$

Valeur efficace et mesure au multimètre

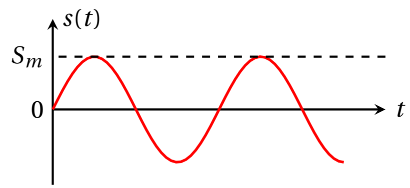
En mode AC (∼) un multimètre affiche **la valeur efficace** s_{eff} du signal mesuré.

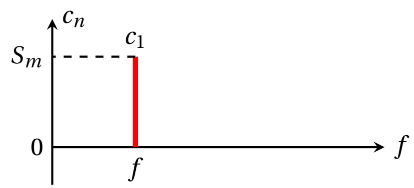
3.4 Décomposition de Fourier des signaux classiques

Dans ce paragraphe on considère uniquement des signaux **sans composante continue**, c'est-à-dire de valeur moyenne nulle.

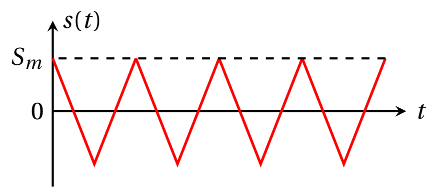
3.4.1 Signal sinusoïdal

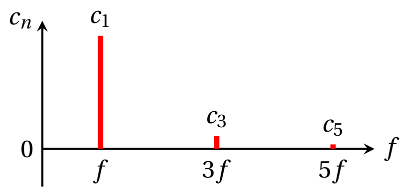
Un signal sinusoïdal $s(t) = S_m\cos(\omega t+\varphi)$ de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ne contient, par définition, qu'une seule composante de fréquence f !





3.4.2 Signal triangulaire





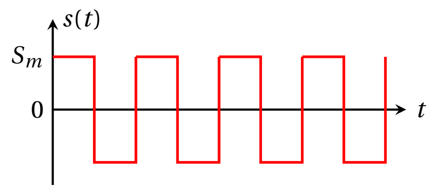
Spectre en amplitude d'un signal triangulaire

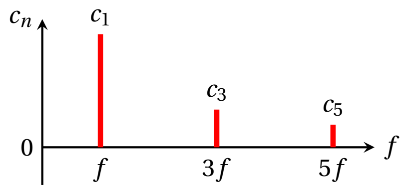
La décomposition de Fourier du signal triangulaire ci-dessus, d'amplitude S_m, est :

$$s(t) = \frac{8S_m}{\pi^2}\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \ldots\right)$$

- Le spectre en amplitude d'un signal triangulaire contient uniquement des harmoniques **de rang impair** ;
- L'amplitude des harmoniques décroît en $1/n^2$, avec n le rang de l'harmonique.

3.4.3 Signal rectangulaire (ou créneau)





Spectre en amplitude d'un signal rectangulaire

La décomposition de Fourier du signal rectangulaire ci-dessus, d'amplitude S_m, est :

$$s(t) = \frac{4S_m}{\pi}\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{3}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega t) + ...\right)$$

- Le spectre en amplitude d'un signal rectangulaire contient uniquement des harmoniques **de rang impair** ;
- L'amplitude des harmoniques décroît en $1/n$, avec n le rang de l'harmonique.

3.5 Filtres linéaires et principe de superposition

Principe de superposition

La réponse d'un filtre linéaire à une somme d'excitations est égale à la somme des réponses à chaque excitation individuelle.

Autrement dit, pour tout filtre linéaire F :

$$\text{si } \begin{cases} e_1(t) \xrightarrow{F} s_1(t) \\ e_2(t) \xrightarrow{F} s_2(t) \end{cases} \quad \text{alors} \quad e_1(t) + e_2(t) \xrightarrow{F} s_1(t) + s_2(t)$$

On s'intéresse au cas particulier où $e_1(t)$ et $e_2(t)$ sont des sinusoïdes de pulsations différentes :

$$\begin{cases} e_1(t) = E_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \xrightarrow{F} s_1(t) = G(\underline{\omega_1})E_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \varphi(\underline{\omega_1})) \\ e_2(t) = E_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \xrightarrow{F} s_2(t) = G(\underline{\omega_2})E_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \varphi(\underline{\omega_2})) \end{cases}$$

ATTENTION : Il faut calculer le gain et la phase du filtre **à la bonne pulsation** : on utilise ω_1 pour $e_1(t)$ et ω_2 pour $e_2(t)$.

Action d'un filtre linéaire sur un signal quelconque périodique

La réponse d'un filtre linéaire à un signal d'entrée périodique est égal à la somme des réponses à chacune de ses composantes de Fourier.

On peut envisager différentes méthodes pour étudier l'action d'un filtre sur un signal d'entrée :

- Chercher l'expression mathématique de la tension de sortie, par le calcul ou bien en exploitant un diagramme de Bode fourni. On utilise généralement cette méthode lorsque le signal d'entrée est simple (s'il possède au plus deux composantes de Fourier).
- Raisonner de manière qualitative et déterminant les composantes du signal d'entrée qui sont transmises (dans la bande passante) et celles qui sont coupées (en dehors de la bande passante).
- Anticiper l'allure du signal du sortie en identifiant un caractère dérivateur ou intégrateur.

3.6 Action d'un filtre : calcul du signal de sortie

Un filtre a pour fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + \frac{\omega_0}{j\omega}}$, avec $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 50\,\text{Hz}$.

1. Quel est la nature de ce filtre ? Quelle est sa fréquence de coupure ?

2. Déterminer le gain $G(\omega)$ et la phase $\varphi(\omega)$ de ce filtre pour une pulsation ω quelconque.

3. On impose la tension d'entrée $e(t) = E_0 + E_1\cos(2\pi f t)$, avec $f = 5\,\text{kHz}$.
Calculer la tension de sortie $s(t)$. Quel est le rôle de ce filtre ?

Indication : La réponse d'un filtre à une composante continue est :

$$E_0 \xrightarrow{F} S_0 = G(0)E_0$$

3.7 Action d'un filtre : approche qualitative

Un filtre a pour fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$, avec $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 50\,\text{Hz}$.

1. Quel est la nature de ce filtre ? Quelle est sa fréquence de coupure ? Tracer l'allure de son diagramme de Bode asymptotique.

2. On impose une tension d'entrée $e(t)$ rectangulaire, de moyenne $E_0 = 3\,\text{V}$, d'amplitude $E_1 = 1\,\text{V}$ et de fréquence $f = 5\,\text{kHz}$.
Tracer l'allure du signal de sortie $s(t)$. Justifier que ce filtre peut être qualifié de *moyenneur*.

3. En réalité le signal de sortie n'est pas tout à fait constant mais présente des oscillations triangulaires de faible amplitude autour de sa valeur moyenne. Justifier.