# Devoir n°16 (non surveillé)

**EXERCICE 1**

1) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (2x-1)y = 0$.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

2) Démontrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

3) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \neq 0$.

4) Étudier la continuité à gauche et à droite et la dérivabilité à gauche et à droite de $f$ en 0.

5) Étudier les limites et les variations de $f$ (à résumer dans un tableau). Étudier sa convexité.

6) Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

7) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n$ telle que, pour tout $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}$$

et vérifier que, pour tout $x \neq 0$, on a $P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)$.

8) Calculer $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ et $P_3(x)$.

9) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme de plus haut degré de $P_n(x)$ est $(-1)^n(n+1)!\,x^n$ et que son coefficient constant est 1.

**EXERCICE 2 - Intégrales et produit de Wallis**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx.$$

1) Calculer $I_0$ et $I_1$.

2) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\,I_n$ (on pourra intégrer par parties en écrivant $\sin^{n+2}(x) = \sin^{n+1}(x)\sin(x)$).

4) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^pp!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{(2^pp!)^2}{(2p+1)!}$.

5) Justifier que $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la limite de $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

6) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

7) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

8) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $w_p = \displaystyle\prod_{n=1}^{p} \frac{4n^2}{4n^2-1}$. Montrer que $w_p = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ et en déduire la limite de la suite de terme général $w_p$ quand $p$ tend vers $+\infty$.