

Fiche d'exercices : Calcul matriciel - Systèmes linéaires

Exercice 1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- 1) Quelles que soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.
- 2) Si A et B sont deux matrices carrées telles que $AB = 0$, alors $BA = 0$.
- 3) Si B commute avec A , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B commute avec A^n .
- 4) Si $AB = AC$, alors $B = C$.
- 5) Si $AB = AC$ et que A est inversible, alors $B = C$.
- 6) Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ aussi.
- 7) Si A est inversible et que $\alpha \in K^*$, alors αA est inversible.
- 8) Si A est inversible, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est inversible et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
- 9) Si A est inversible et symétrique, alors A^{-1} est symétrique.
- 10) Si A et B sont symétriques, alors AB est symétrique.

Exercice 2 Expliciter la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in \mathcal{M}_4(K)$ dans les cas suivants :

$$a_{ij} = \frac{i}{j} ; a_{ij} = (-1)^{i+j} ; a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 1 & \text{si } j > i \\ -1 & \text{si } j < i \end{cases} ; a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 5 - i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Exercice 3 Quelles sont les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les équations suivantes :

$$A^2 = I_2 ; A^2 = A ; A^2 = 0 .$$

Exercice 6

- 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I)^2$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - v_n \end{cases}$. Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 7 Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 8 Une matrice carrée réelle est stochastique si tous ses coefficients sont compris entre 0 et 1 et que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$. Calculer A^4 et en déduire A^{-1} .

Exercice 10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $aM^2 + bM + cI = 0$ avec $c \neq 0$. Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M .

Exercice 11 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$. Trouver $\alpha, \beta \in K$ tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_2$. En déduire que M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et calculer alors M^{-1} .

Exercice 12

- 1) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K), \forall \alpha, \beta \in K, \text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Tr} A + \beta \text{Tr} B$.
- 2) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K), \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- 3) Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(AA^T) \geq 0$. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 13

- 1) Calculer AA^T et $A^T A$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 2) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, les matrices AA^T et $A^T A$ sont symétriques.
- 3) Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), (AA^T = 0 \Leftrightarrow A^T A = 0 \Leftrightarrow A = 0)$. Est-ce toujours vrai si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$?

Exercice 14 Soit A une matrice carrée telle que $A^n = 0$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que $I - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 15 Dans les cas suivants, déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Indication : on pourra commencer par chercher le commutant de A .

Exercice 16 Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$?

Exercice 17 Résoudre les systèmes suivants (d'inconnues x, y) :

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y = -a \end{cases} ; \begin{cases} ax + by = 1 \\ ax - by = -1 \end{cases} ; \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$$

Exercice 18 Résoudre les systèmes suivants (d'inconnues x, y, z) :

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} ; \begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases} ; \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 19 Résoudre les systèmes suivants (d'inconnues x, y, z, t) :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 3x + 2y + z - t = 4 \end{cases} ; \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + t = c \\ t + x = d \end{cases} ; \begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + my + z - mt = m + 2 \\ mx - y - mz - t = -1 \end{cases}$$

Exercice 20 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ pair et $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_n = 1 \\ x_2 + \lambda x_{n-1} = 1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + \lambda x_2 = 1 \\ x_n + \lambda x_1 = 1 \end{cases}.$$

Exercice 21 Inverser, si possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2+i & 1-2i \\ 2-3i & -1-i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 Inverser, si possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ b & b+1 & b \\ c & c & c+1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 Inverser, si possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- 2) Calculer $D = P^{-1}AP$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer D^n et en déduire A^n .
- 4) Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .