Correction du DNS 13

Partie I

1) a) La fonction f_n est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}(nx^{n-1} - x^n)e^{-x} = \frac{x^{n-1}}{n!}(n-x)e^{-x}.$$

La fonction f_n' s'annule donc en n et en 0 si $n \neq 1$, elle est positive sur $[0, n]$ et négative sur $[n, +\infty[$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0, n]$ et strictement décroissante sur $[n, +\infty[$. On ajoute dans le tableau $f_n(0) = 0$, $f_n(n) = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ (croissances comparées).

2) Pour étudier la position de $\mathcal{C}_n$ par rapport à $\mathcal{C}_{n+1}$, on étudie le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

On a, pour tout $x \in I$,

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)e^{-x} = \frac{x^n}{n!}(n+1-x)e^{-x}.$$

Les courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ se croisent donc à l'origine et au point de coordonnées $\left(n+1, \dfrac{(n+1)^n e^{-n-1}}{n!}\right)$. $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[0, n+1]$ et en-dessous sur l'intervalle $[n+1, +\infty[$ (faire un tableau).

3) La tangente à l'origine à la courbe $\mathcal{C}_1$ est la droite d'équation $y = x$ car $f_1'(0) = 1$. Si $n > 1$, $f_n'(0) = 0$ donc la tangente à l'origine à $\mathcal{C}_n$ est horizontale.

Partie II

1) a) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$.

b) On intègre par parties ($u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)x^n$, $v(x) = -e^{-x}$, $v'(x) = e^{-x}$) :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx\right) \\ &= -\frac{e^{-1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}dx \\ &= I_n - \frac{e^{-1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

c) Montrons par récurrence que $I_n = 1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a vu que $I_0 = 1 - e^{-1}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $I_n = 1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, et montrons que $I_{n+1} = 1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}$.

D'après la question précédente, on a $I_{n+1} = I_n - \dfrac{e^{-1}}{(n+1)!} = 1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{e^{-1}}{(n+1)!} = 1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}$, ce que l'on voulait.

Par le théorème de récurrence, on peut conclure que $I_n = 1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) On a vu précédemment que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = -\dfrac{e^{-1}}{(n+1)!} < 0$, donc la suite (I_n) est strictement décroissante.

De plus, pour tout n, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle $[0, 1]$, donc $I_n \geqslant 0$. La suite (I_n) est donc minorée par 0.

La suite (I_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente (et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \geqslant 0$ par passage à la limite).

b) Soit $x \in [0, 1]$. Alors $f_n(x) \geqslant 0$. De plus $-x \leqslant 0$ donc $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$ (croissance de l'exponentielle), d'où $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$.

c) En intégrant on obtient $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n!}dx$, soit $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n dx$. Or $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}.$$

Par le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3) D'après 1)c), $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e(1 - I_n)$, donc d'après 2)c), $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

Partie III

1) La suite (I_n) est positive et strictement décroissante donc elle ne peut pas s'annuler (si on avait $I_{n_0} = 0$ pour un certain n_0, alors on aurait $I_n < 0$ pour tout $n > n_0$).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < I_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$, donc $0 < 1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$ et donc $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$.

3) Pour $n = q$ on a $0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{e}{(q+1)!}$ donc en multipliant par $q!$ on obtient

$$0 < p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \leqslant \frac{e}{q+1}.$$

4) $p(q-1)!$ est clairement un entier et si $k \leqslant q$ alors $q!$ est divisible par $k!$ donc $\frac{q!}{k!}$ est également un entier. Par conséquent le membre du milieu de l'encadrement est un entier.

Or q n'est pas égal à 1 (sinon on aurait $e = p \in \mathbb{N}$) donc on a $q \geqslant 2$ et donc $\frac{e}{q+1} \leqslant \frac{e}{3} < 1$ puisque $e < 3$. Ainsi le membre du milieu de l'encadrement est un entier compris strictement entre 0 et 1 : contradiction.

On en déduit que e est irrationnel.

Partie IV

1) a) Posons $f(x) = \ln(1+x) - x + x^2/4$ pour $x \in [0,1]$. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{2 - 2(1+x) + x(1+x)}{2(1+x)} = \frac{x(x-1)}{2(1+x)}$$

qui est négatif sur $[0,1]$. La fonction f est donc décroissante sur $[0,1]$ et comme $f(0) = 0$ on en déduit qu'elle est négative sur cet intervalle. On en déduit que $\ln(1+x) \leqslant x - x^2/4$ pour tout $x \in [0,1]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $1/n \in [0,1]$ donc d'après la question précédente $\ln(1+1/n) \leqslant 1/n - 1/(4n^2)$, d'où $n\ln(1+1/n) \leqslant 1 - 1/(4n)$ et donc par croissance de l'exponentielle

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant e^{1-\frac{1}{4n}}.$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n e^{-n}} = \frac{(n+1)^{n+1}e^{-1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n e^{-1}}{n^n} = e^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

b) D'après la question 1)b) on a donc

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \leqslant e^{-1}e^{1-\frac{1}{4n}} = e^{-\frac{1}{4n}} \leqslant 1$$

donc la suite (M_n) est décroissante. De plus elle est positive, donc minorée par 0. On en déduit qu'elle est convergente et que sa limite est positive.

c) L'inégalité est vraie pour $n = 1$ car $M_1 = e^{-1}$ et $e^{-1-\frac{1}{4}H_0} = e^{-1}$ aussi.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $M_n \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}H_{n-1}}$. On a vu que $\dfrac{M_{n+1}}{M_n} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}}$ donc

$$M_{n+1} \leqslant e^{-\frac{1}{4n}} M_n \leqslant e^{-\frac{1}{4n}} e^{-1-\frac{1}{4}H_{n-1}} = e^{-1-\frac{1}{4}H_{n-1}-\frac{1}{4n}}.$$

Or $-\frac{1}{4}H_{n-1} - \frac{1}{4n} = -\frac{1}{4}\left(H_{n-1} + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{4}H_n$ donc

$$M_{n+1} \leqslant e^{-1-\frac{1}{4}H_n}.$$

Le théorème de récurrence permet de conclure que l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-1 - \frac{1}{4}H_{n-1}\right) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1-\frac{1}{4}H_{n-1}} = 0$.

De plus (M_n) est positive donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.