Correction du DNS 14

EXERCICE 1

1) a) Il y a plusieurs manières de faire. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$. Alors $\sqrt{y}-\sqrt{x} \geqslant 0$ donc :

$$\sqrt{y}-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x} \Leftrightarrow (\sqrt{y}-\sqrt{x})^2 \leqslant \sqrt{y-x}^2 \Leftrightarrow y+x-2\sqrt{xy} \leqslant y-x \Leftrightarrow 2x \leqslant 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{xy},$$

ce qui est vrai car $x \leqslant y$. On a donc bien $\sqrt{y}-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$.

b) Raisonnons par récurrence.

Au rang initial ($n=0$), $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Or $0 \leqslant a \leqslant b$, donc on a bien $0 \leqslant b_0 - a_0 \leqslant \dfrac{b-a}{2^0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$ et montrons que $0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Calculons :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_nb_n} = \frac{a_n+b_n-2\sqrt{a_nb_n}}{2} = \frac{(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})^2}{2}.$$

Ainsi, d'après le a) :

$$0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{(\sqrt{b_n-a_n})^2}{2} = \frac{b_n-a_n}{2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Par le théorème de récurrence, la propriété à démontrer est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) D'après la question précédente et le théorème des gendarmes, on a déjà $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n) = 0$. Étudions la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_nb_n} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n}) \geqslant 0$$

car on a vu que $b_n - a_n \geqslant 0$, donc $b_n \geqslant a_n$. La suite (a_n) est croissante. De même,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n+b_n}{2} - b_n = \frac{a_n-b_n}{2} \leqslant 0$$

car $b_n \geqslant a_n$. La suite (b_n) est décroissante.

Conclusion : la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n) = 0$, donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite.

3) a) Pour obtenir une valeur approché de $L(a,b)$ à ε près, il suffit de calculer les a_n et les b_n jusqu'à ce que $b_n - a_n$ soit inférieur à ε.

```
from math import sqrt

def L(a, b, eps):
    '''Renvoie la moyenne arithmético-géométrique de a et b à eps près par défaut.
       Précondition : a <= b.'''
    while b - a > eps:
        a, b = sqrt(a*b), (a+b)/2
    return a
```

b)

```
>>> L(1, 2, 1e-9)
1.4567910310469068
```

EXERCICE 2

1) On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \frac{\ln 2}{2}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{n+1} x - \tan^n x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(\tan x - 1)\,dx.$$

Or pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $0 \leqslant \tan x \leqslant 1$, donc $\tan^n x(\tan x - 1) \leqslant 0$. Par conséquent $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$: la suite (I_n) est décroissante.

De plus on a $I_n \geqslant 0$ pour tout n donc la suite (I_n) est minorée par 0. Elle est donc convergente.

3) a) On pose $x = \tan t$. Alors $t = \operatorname{Arctan} x$ donc $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$, et donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$.

b) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2$, donc $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$, et donc

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc par le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

b) On a $I_0 + I_2 = 1$ donc $I_2 = \dfrac{\pi}{4} - 1$, et $I_1 + I_3 = \dfrac{1}{2}$ donc $I_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

D'autre part, en passant à la limite dans l'égalité $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$, on obtient $L + L = 0$, d'où $L = 0$.

5) a) On intègre par parties ($u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $u'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $v'(x) = x^n$, $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$). On obtient

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x^2}\right]_0^1 + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx.$$

b) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 \leqslant (1+x^2)^2 \leqslant 4$, donc $\dfrac{x^{n+2}}{4} \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \leqslant x^{n+2}$, et donc

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4} dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx \leqslant \int_0^1 x^{n+2} dx,$$

soit

$$\frac{1}{4(n+3)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx \leqslant \frac{1}{n+3}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, donc par le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$nI_n = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{2n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ donc d'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{2}.$$

6) a) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a $\dfrac{1}{2k+1} = I_{2k+2} + I_{2k}$. Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (I_{2k+2} + I_{2k}) = I_2 + I_0 - I_4 - I_2 + I_6 + I_4 - \ldots + (-1)^n I_{2n+2} + (-1)^n I_{2n} = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}.$$

On peut aussi raisonner par récurrence.

b) On a vu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{2n+2} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \frac{\pi}{4}$.