Corrigé DS4

Exercice 1 : Disdromètre à impact

1. À l'équilibre, la platine est soumise à son poids $\vec{P} = Mg\vec{u}_z$ et à la force de rappel du ressort $\vec{F}_r = k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_z$. On applique le principe fondamental de la statique à la platine dans le référentiel lié au support, projeté sur $\vec{u}_z$:

$$0 = Mg + k(\ell_{eq} - \ell_0) \iff \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}}$$

2. On étudie maintenant le mouvement de la platine. On ajoute la force exercée par l'amortisseur : $\vec{f} = -\lambda\dot{Z}\vec{u}_z$ et celle exercée par la goutte d'eau. La longueur du ressort dans une position quelconque de la platine s'écrit : $\ell = \ell_{eq} - Z$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la platine, projeté sur $\vec{u}_z$:

$$M\ddot{Z} = -Mg + k\left(\frac{Mg}{k} - Z\right) - \lambda\dot{Z} + F(t) \iff \boxed{\ddot{Z} + \frac{\lambda}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = \frac{F(t)}{M}}$$

On identifie les paramètres : $\boxed{\gamma = \dfrac{\lambda}{M}}$ et $\boxed{\beta = \dfrac{k}{M}}$.

3. La réponse du disdromètre est la plus rapide lorsque celui-ci est paramétré pour fonctionner en **régime critique**. Cela suppose que le discriminant associé au polynôme caractéristique soit nul :

$$\Delta = \gamma^2 - 4\beta = 0 \iff \boxed{\gamma^2 = 4\beta}$$

4. On détermine une solution particulière en résolvant l'équation sans dérivée :

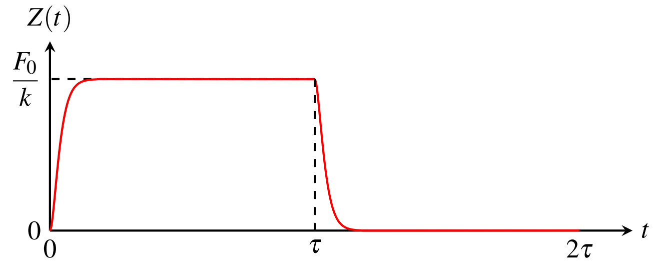
$$\frac{k}{M}Z_p = \frac{F_0}{M} \iff Z_p = \frac{F_0}{k}$$

La racine double du polynôme caractéristique est : $r = -\gamma/2$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $Z(t) = \frac{F_0}{k} + (At+B)e^{-\gamma t/2}$. Les conditions initiales sont $Z(0) = 0$ et $\dot{Z}(0) = 0$ (platine initialement en équilibre). On montre que les constantes d'intégration sont : $A = -\frac{\gamma}{2}\frac{F_0}{k}$ et $B = -\frac{F_0}{k}$:

$$\boxed{Z(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(1 + \gamma\frac{t}{2}\right)e^{-\gamma t/2}\right]}$$

5. La fonction $Z(t)$ tend vers F_0/k en un temps caractéristique $2/\gamma$. On peut faire en sorte que $Z(\tau) = F_0/k$ à condition de choisir : $\tau \gg 2/\gamma \iff \boxed{\gamma \gg 2/\tau}$.

6. En suivant l'hypothèse $\tau \gg \gamma/2$, dans l'intervalle $0 \leq t \leq \tau$ la platine atteint rapidement sa position asymptotique, tandis qu'après $t = \tau$, en régime libre, elle retourne rapidement dans sa position d'équilibre. Les deux évolutions s'effectuent sans oscillation puisque l'on est en régime critique.



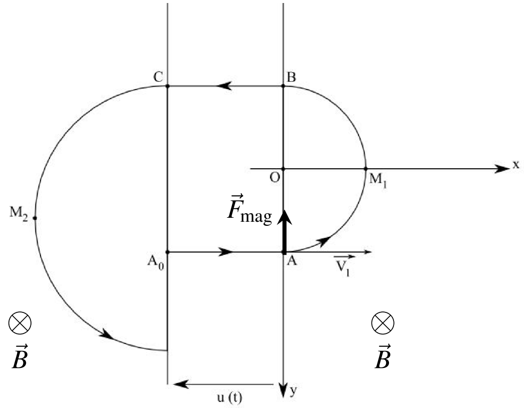
7. Avec l'enregistrement de $Z(t)$, on peut mesurer le déplacement maximal $Z(\tau)$ de la platine après chaque impact et en déduire $F_0 = kZ(\tau)$ puis, grâce à la formule $F_0 = KD^3$, connaître le diamètre de toutes les gouttes.

Remarque : Dans un premier temps il est nécessaire **d'étalonner le disdromètre** en faisant tomber des gouttes de diamètre connu afin de mesurer la constante K.

Exercice 2 : Mouvement d'un proton dans un cyclotron

1. La force de Lorentz magnétique qui s'exerce sur le proton : $\vec{F}_{mag} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonale à tout instant au vecteur vitesse. Par conséquent $\vec{F}_{mag}$ ne travaille pas donc, d'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué au proton dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, l'énergie cinétique se conserve au cours du mouvement ; **le mouvement est uniforme**.

2. Le champ magnétique est orthogonal au plan de la figure. Pour déterminer son sens on regarde le sens de déviation du proton dans le Dee 1. La force magnétique au point A : $\vec{F}_A = e\vec{v}_1 \wedge \vec{B}$ doit être dirigée vers "le haut" et comme la charge du proton est positive, le champ magnétique doit être **sortant** (d'après la règle des trois doigts de la main droite). Le même raisonnement permet de montrer que le champ magnétique est également sortant dans le Dee 2 (ce qui est cohérent avec le schéma de la page 3).



3. Voir démo faite en cours.

4. Au cours d'un demi-tour le proton parcourt une moitié de périmètre : $\boxed{d_n = \pi R_n}$.

5. Le mouvement dans un dee est uniforme donc la durée du n[ième] demi-tour vaut :

$$\Delta t = \frac{d_n}{V_n} = \frac{\pi}{V_n} \times \frac{m_p V_n}{eB} \iff \boxed{\Delta t = \frac{\pi m_p}{eB}}$$

Cette durée ne dépend pas de la vitesse du proton donc **elle est la même pour chaque demi-tour**.

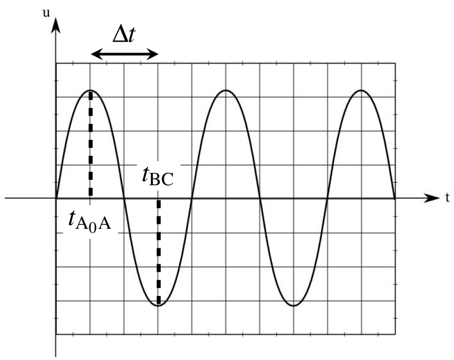
6. Pour que le proton soit accéléré il faut que la force de Lorentz électrique : $\vec{F}_{\text{elec}} = e\vec{E}$ qui s'exerce sur le proton soit dirigée dans le sens du mouvement. Puisque la charge du proton est positive cela signifie que **le champ électrique $\vec{E}$ doit être colinéaire et de même sens que le vecteur vitesse**. On en déduit que :

- le champ $\vec{E}$ est orienté suivant $\boxed{+\vec{u}_x}$ lorsque le proton avance de A_0 vers A ;
- le champ $\vec{E}$ est orienté suivant $\boxed{-\vec{u}_x}$ lorsque le proton avance de B vers C.

Le champ électrique est toujours dirigé **vers les potentiels les plus bas**, par conséquent on en déduit que :

- $\boxed{u > 0}$ sur le chemin A_0A ;
- $\boxed{u < 0}$ sur le chemin BC.

7. On s'appuie sur les résultat des questions précédentes.



8. Pour que le proton soit accéléré à chaque demi-tour il faut que la durée Δt corresponde à **une demi-période** $T/2$ de la tension $u(t)$:

$$\Delta t = \frac{\pi m_p}{eB} = \frac{T}{2} \iff T = \frac{2\pi m_p}{eB} \iff \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m_p} = 25\,\text{MHz}}$$

8. La vitesse initiale du proton est négligeable. À chaque passage entre les Dees le travail de la force électrique vaut $W(\vec{F}_{\text{elec}}) = eU$. On applique le théorème de l'énergie cinétique au proton, pour les n premiers passages entre les Dees, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_p V_n^2 - 0 = neU$$

On détermine n pour avoir $V_n = \frac{c}{10}$: $\boxed{n = \frac{m_p c^2}{200eU} = 47}$.

Après 47 passages entre les Dees le proton atteint 10% de la vitesse de la lumière.

Remarque : Au-delà de cette vitesse on entre dans le domaine relativiste et notre modèle classique ne convient plus pour étudier le mouvement du proton.

Exercice 3 : Oscillations forcées électriques

1. On passe dans l'espace complexe et on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{U}_R = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_r + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} U_e = \frac{R}{R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} U_e = \frac{U_e}{1 + \frac{r}{R} + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On identifie ; $\boxed{A_1 = 1 + \frac{r}{R}}$, $\boxed{A_2 = \frac{L}{R}}$ et $\boxed{A_3 = \frac{1}{RC}}$.

2. On calcule l'amplitude réelle de $u_R(t)$:

$$U_R = |\underline{U}_R| = \frac{U_e}{\sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$$

L'amplitude est maximale si et seulement si le dénominateur est minimal, c'est-à-dire si $\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} = 0$ (car un carré ne peut pas être inférieur à zéro). On détermine la pulsation de résonance :

$$\frac{L\omega_r}{R} - \frac{1}{RC\omega_r} = 0 \iff \boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

On détermine l'inductance avec la fréquence de résonance donnée sur la figure 4 : $\boxed{L = \frac{1}{4\pi^2 f_r C} = 66\,\text{mH}}$.

3. D'après les calculs de la question précédente : $\boxed{U_{R,\max} = \frac{R}{r+R} U_e}$.

4. La largeur de la bande passante vaut : $\boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_r}{Q}}$.

5. On rappelle que les fréquences de coupure sont définies par $U_R(f_c) = \frac{U_{R,\max}}{\sqrt{2}}$. On mesure sur la figure 4 :

$$f_{c1} = 120\,\text{Hz} \;\text{ et }\; f_{c3} = 300\,\text{Hz} \;\text{ donc }\; Q = \frac{f_r}{f_{c2} - f_{c1}} = 1,1$$

On détermine alors les deux résistances :

$$\begin{cases} U_{R,\max} = \dfrac{R}{r+R} U_e \\ Q = \dfrac{1}{r+R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases} \implies \boxed{R = \frac{U_{R,\max}}{QU_e}\sqrt{\frac{L}{C}} = 43\,\Omega} \;\text{ et }\; \boxed{r = R\left(\frac{U_e}{U_{R,\max}} - 1\right) = 31\,\Omega}$$

6. On associe les impédances $\underline{Z}_r$, $\underline{Z}_L$ et $\underline{Z}_C$ en série : $\underline{Z}_1 = r + jL\omega + \frac{1}{jc\omega}$. On associe ensuite $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_{C'}$ en dérivation :

$$\boxed{\underline{Y}_{AD} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_{C'} = \frac{1}{r + jL\omega + \frac{1}{jc\omega}} + jC'\omega}$$

7. On applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{U}_R = \frac{R}{R + \underline{Z}_{AD}} \underline{U}_e \iff \frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_R} = 1 + \frac{\underline{Z}_{AD}}{R} = 1 + \frac{1}{R\underline{Y}_{AD}}$$

Si $u_e(t)$ et $u_R(t)$ sont en phase alors :

$$\Delta\varphi_{u_e/u_R} = \left|\varphi_e - \varphi_R\right| = \left|\arg\left(\frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_R}\right)\right| = \left|\arg\left(1 + \frac{1}{R\underline{Y}_{AD}}\right)\right| = 0$$

L'argument est nul à condition que $1 + \frac{1}{R\underline{Y}_{AD}}$ soit un réel positif. On en déduit que $\underline{Y}_{AD}$ **doit être réel pour que** $u_e(t)$ **et** $u_R(t)$ **soient en phase**.

8. On détermine la partie imaginaire de $\underline{Y}_{AD}$:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{AD} = \frac{1}{r + jL\omega + \frac{1}{jc\omega}} + jC'\omega &= \frac{1}{r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} + jC'\omega \\
&= \frac{r - j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} + jC'\omega \\
&= \frac{r}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} + j\left(C'\omega - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

La partie imaginaire doit être nulle donc :

$$\boxed{C' = \frac{L - \frac{1}{C\omega^2}}{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 10\,\mu\mathrm{F}}$$