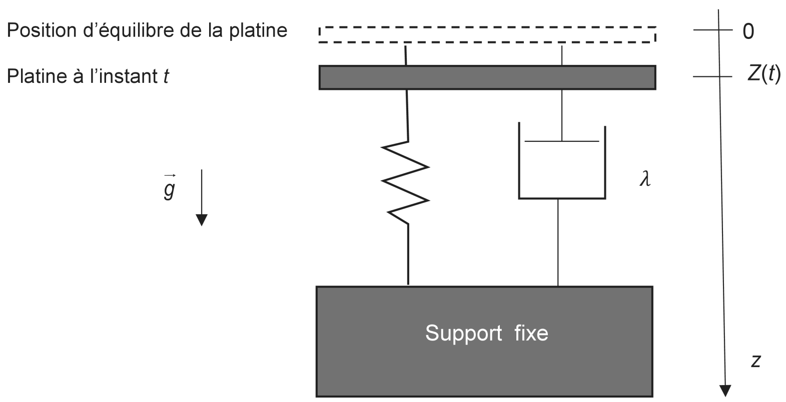
DS de physique n°4

Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. La copie doit être propre, lisible, sans faute d'orthographe. Les pages doivent être numérotées et ***les résultats soulignés ou encadrés****. Un résultat donné sans justification, à moins que l'énoncé le précise, est considéré comme faux. Les valeurs numériques doivent être accompagnées de leur unité. Le devoir comporte 3 exercices indépendants. Faites attention à la numérotation des pages.* ***Il y a une feuille annexe à rendre avec la copie****.*

Exercice 1 : Disdromètre à impact

Un disdromètre est un appareil qui mesure la distribution de la taille des gouttes lors d'un évènement pluvieux. On suppose que les gouttes d'eau qui se forment dans l'atmosphère et tombent sous l'effet de leur poids sont sphériques de diamètre D. Elle sont ralenties par les frottements visqueux de l'air et atteignent, avant de toucher le sol, une vitesse limite qui varie avec le diamètre. Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le disdromètre à impact.



Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque horizontal, de rayon R et de masse M, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{\text{platine}}$.

Une goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\vec{F}(t) = F(t)\vec{u}_z$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (voir figure ci-dessus).

1. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

2. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k, M et λ.

On modélise l'action mécanique d'une goutte sur la platine par une force $F(t) = F_0$ constante qui s'exerce entre $t = 0$ et $t = \tau$. La force est nulle avant $t = 0$ et après $t = \tau$. Par la suite on se place dans l'intervalle $0 \leq t \leq \tau$ et on règle les paramètres du disdromètre pour que son temps de retour à l'équilibre soit le plus petit possible.

3. En quel régime d'amortissement faut-il se placer ? Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ?

On se place dans ce cas.

4. Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte ($Z(0) = 0$ et $\dot{Z}(0) = 0$), montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \left(1 + \gamma \frac{t}{2} \right) \mathrm{e}^{-\gamma t/2} \right]$$

5. Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) \simeq \dfrac{F_0}{k}$?

6. Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$. On ne demande pas de calcul pour le comportement dans l'intervalle $\tau \leq t \leq 2\tau$.

7. On peut montrer que $F_0 = KD^3$, avec K un coefficient positif. Expliquer comment exploiter le graphe de $Z(t)$ pour déterminer la distribution du diamètre des gouttes. On suppose que les impacts de deux gouttes successives sont toujours séparés d'au moins 2τ (le disdromètre a toujours le temps de revenir à l'équilibre entre deux impacts).

Exercice 2 : Mouvement d'un proton dans un cyclotron

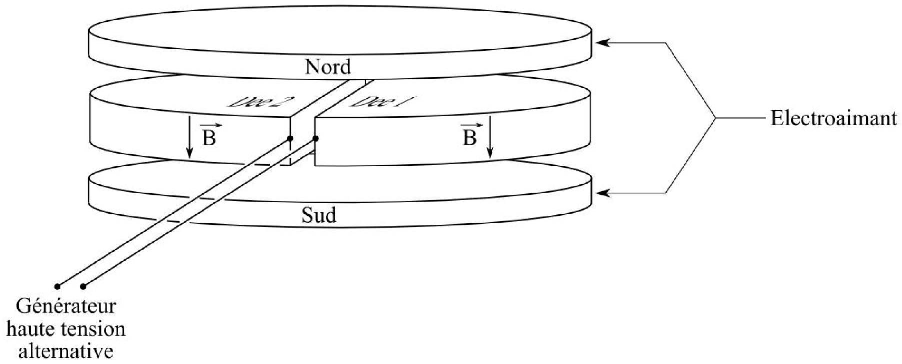
Un cyclotron est un accélérateur de particules qui utilise l'action combinée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$ afin d'accélérer des particules chargées.

Dans le cadre du traitement de certains cancers crâniens et oculaires, notamment chez les enfants, la radiothérapie classique est avantageusement remplacée par la protonthérapie (envoi de protons rapides sur les cellules cancéreuses en vue de les détruire) qui minimise les dégâts occasionnés aux tissus biologiques entourant la tumeur. Les protons à envoyer dans la tumeur sont accélérés à l'aide d'un cyclotron. En France, il existe deux principaux centres utilisant cette technique : Nice (protons de 65 MeV) et Orsay (protons de 200 MeV). On va ici s'intéresser au principe d'un cyclotron qui pourrait être utilisé dans ce cadre.

Le cyclotron est constitué de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R très légèrement écartés et creux, les « Dees », au sein desquels règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant d'intensité $B = 1,67\,\mathrm{T}$. À l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees une tension haute fréquence de valeur maximale $U = 100\,\mathrm{kV}$ crée un champ $\vec{E}$ perpendiculaire aux faces en regard des Dees.

Des protons de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ et de charge $e = 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, animés d'une vitesse horizontale négligeable, sont injectés au point A_0 de l'espace séparant les deux Dees. (Voir Annexe).

Dans tout le problème, la force de Lorentz sera la seule force prise en compte.



Étude du mouvement dans les Dees

On étudie le mouvement d'un proton qui pénètre pour la première fois dans le Dee 1 en A avec la vitesse $\vec{v}_1$, de norme V_1 (voir feuille annexe).

1. Montrer que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme.

2. Représenter sur le schéma 1 de la feuille annexe les vecteurs champ magnétique dans chacun des Dees, les vecteurs vitesse et force de Lorentz aux points M_1 et M_2.

3. Par application du principe fondamental de la dynamique dans la base de Frenet, montrer que la trajectoire du proton dans le Dee 1 est circulaire de rayon : $R_1 = \dfrac{m_p V_1}{eB}$.

On admet que ce résultat se généralise et que la trajectoire lors de la $n^{\text{ième}}$ traversée d'un Dee sera circulaire uniforme de rayon : $R_n = \dfrac{m_p V_n}{eB}$.

4. Exprimer en fonction de R_n la distance d_n parcourue dans un Dee lors du $n^{\text{ième}}$ demi-tour.

5. Montrer que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans un Dee est indépendante de la vitesse du proton et donner son expression en fonction de m_p, e et B.

Étude du mouvement entre les Dees

Entre les Dees, qui sont très faiblement écartés, le proton décrit une trajectoire rectiligne et est accéléré. On suppose que la durée d'un trajet entre les Dees est négligeable comparée à Δt. On fait en sorte que la tension $u(t)$ soit extrémale à l'instant où le proton passe d'un Dee à l'autre.

6. Préciser la direction et le sens que doit avoir le champ électrique $\vec{E}$ entre les Dees quand le proton décrit A_0A, puis BC. Dans chaque cas, quel doit être le signe de la tension u (définie dans l'annexe, schéma 1) pour que les protons soient toujours accélérés quand ils passent entre les Dees ?

7. Le schéma 2 de l'annexe fournit le graphe de la tension $u(t)$. Noter sur ce graphe :

- le moment où le proton passe de A_0 à A, puis lorsqu'il passe de B à C ;
- la durée Δt de parcours de la trajectoire dans chacun des Dees.

8. Donner la relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt ; en déduire l'expression de la fréquence f de $u(t)$ en fonction de m_p, e et B. Faire l'application numérique.

9. Déterminer le nombre n de demi-tours nécessaires pour que le proton atteigne 10% de la vitesse de la lumière $c = 3,0 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Exercice 3 : Oscillations forcées électriques

On dispose d'une bobine B que l'on assimilera à l'association série d'une inductance L et d'une résistance r. (L et r sont des constantes positives supposées indépendantes de la fréquence).

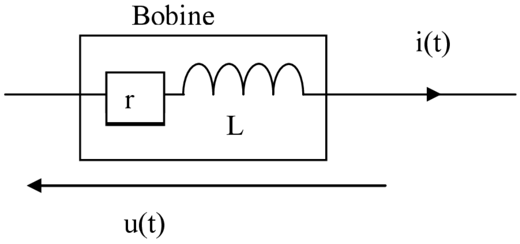


Figure 1

On place, en série avec la bobine, un résistor de résistance R et un condensateur de capacité $C = 10\,\mu\text{F}$.
Le GBF (générateur basses fréquences) est réglé pour délivrer une tension sinusoïdale $u_e(t) = E\cos(\omega t)$ d'amplitude $E = 5\,\text{V}$. Deux tensions sont visualisées sur un oscilloscope numérique.

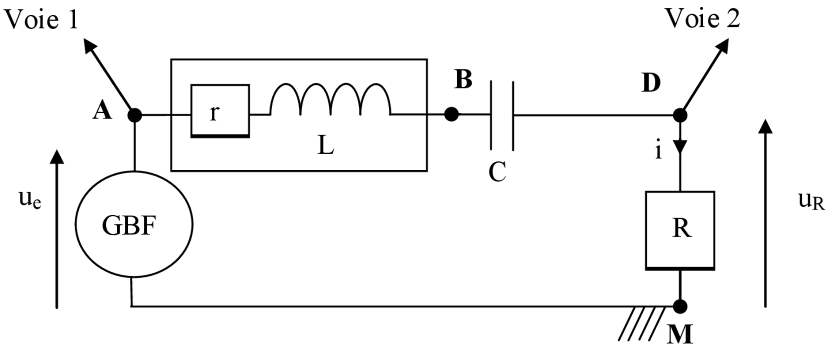


Figure 3

En faisant varier la fréquence du GBF on trace la figure 4, qui représente l'allure de la courbe d'amplitude U_R en fonction de la fréquence f.

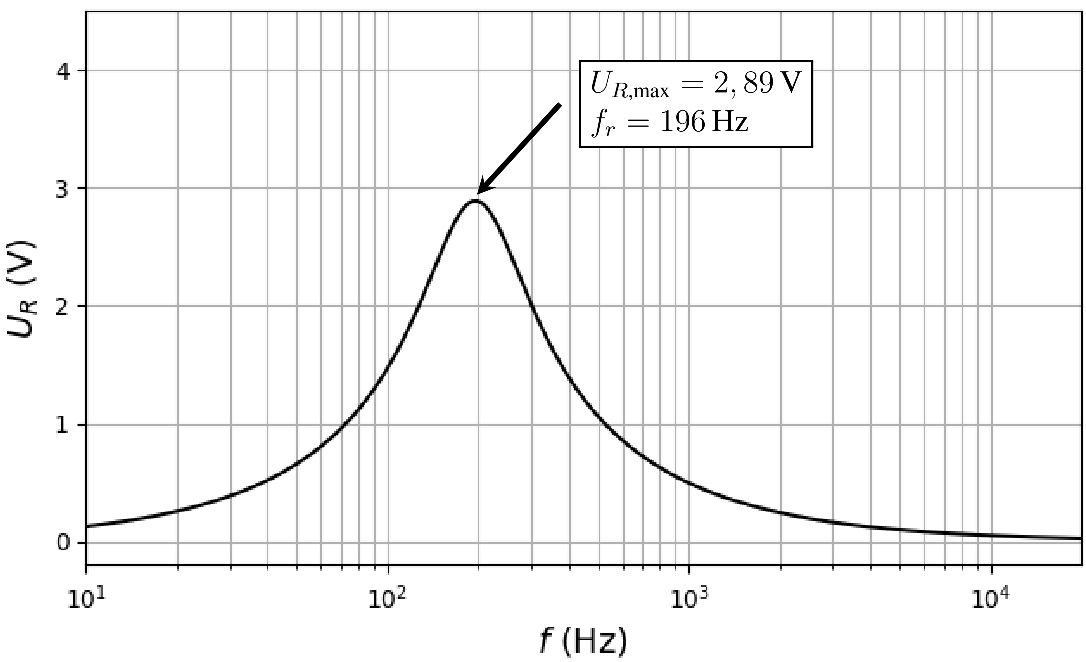


Figure 4

1. Montrer que l'amplitude complexe associée à $u_R(t)$ a pour expression :

$$\underline{U}_R = \frac{U_e}{A_1 + j\left(A_2\omega - \frac{A_3}{\omega}\right)}$$

avec A_1, A_2 et A_3 des paramètres à exprimer en fonction de r, R, L et C.

2. Montrer que $u_R(t)$ entre en résonance pour une pulsation ω_r à déterminer en fonction des paramètres du circuit. En déduire la valeur numérique de l'inductance L.

3. Déterminer littéralement l'amplitude à la résonance $U_{R,\text{max}}$.

4. Rappeler (sans démonstration) la relation entre la largeur de la bande passante Δf et le facteur de qualité Q du circuit.

5. On admet que pour ce circuit : $Q = \dfrac{1}{r+R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Déterminer numériquement les résistances r et R.

On place désormais, en parallèle sur AD une boîte de condensateurs à décades (figure 6) et l'on fait varier cette capacité C' jusqu'à ce que, en observant l'oscilloscope, $u_R(t)$ et $u_e(t)$ soient en phase. La fréquence vaut $f = 250\,\text{Hz}$.

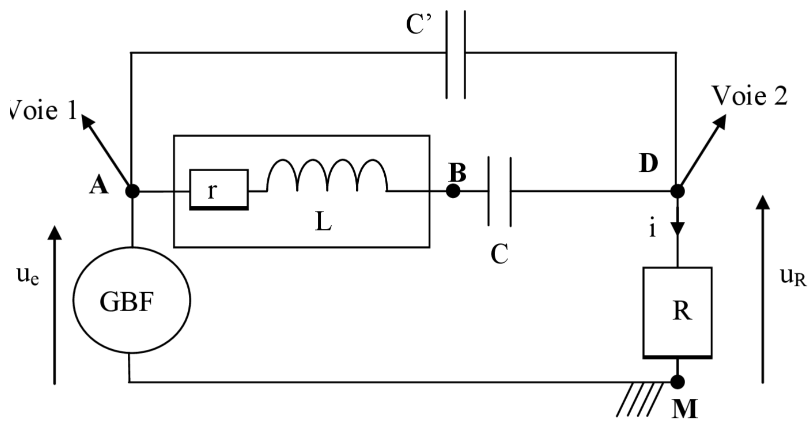


Figure 6

6. Exprimer l'admittance $\underline{Y}_{AD}$ du dipôle AD en fonction de r, L, C, C' et ω.

7. Que pouvez-vous dire de $\underline{Y}_{AD}$ si $u_R(t)$ et $u_e(t)$ sont en phase ? Justifier.

8. Déterminer C' en fonction de r, L, C et ω. Faire l'application numérique avec les valeurs de r et L calculées précédemment.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

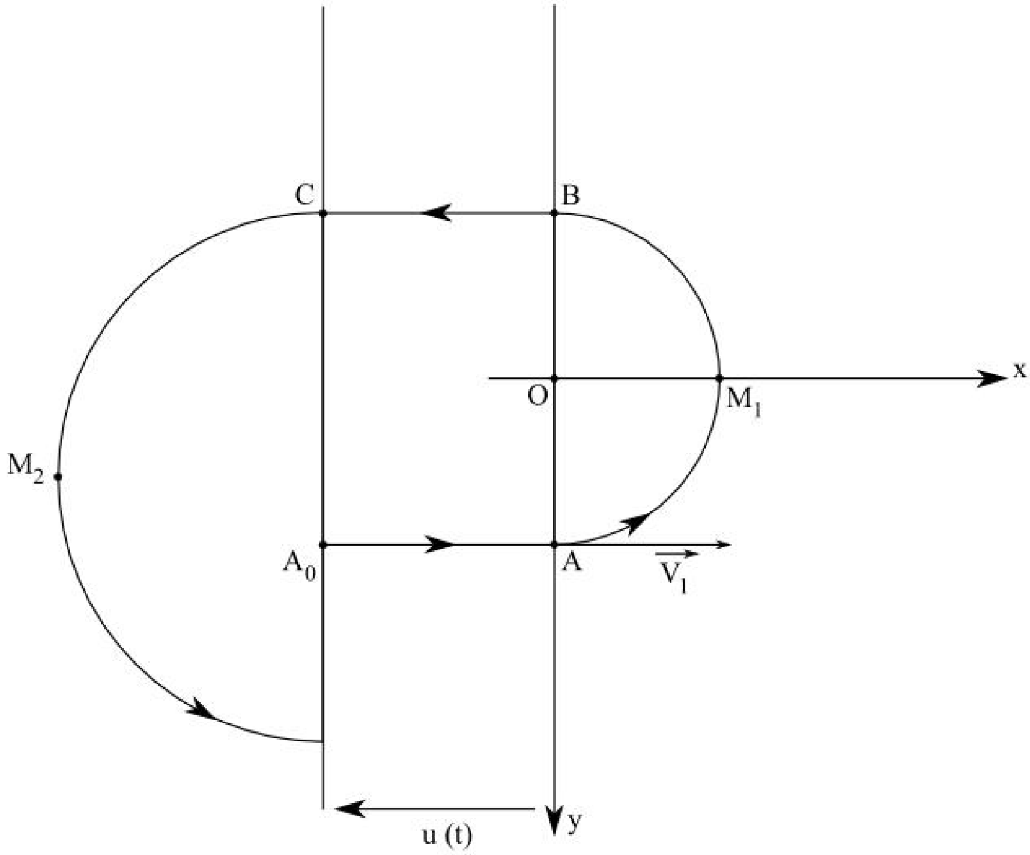


Schéma 1

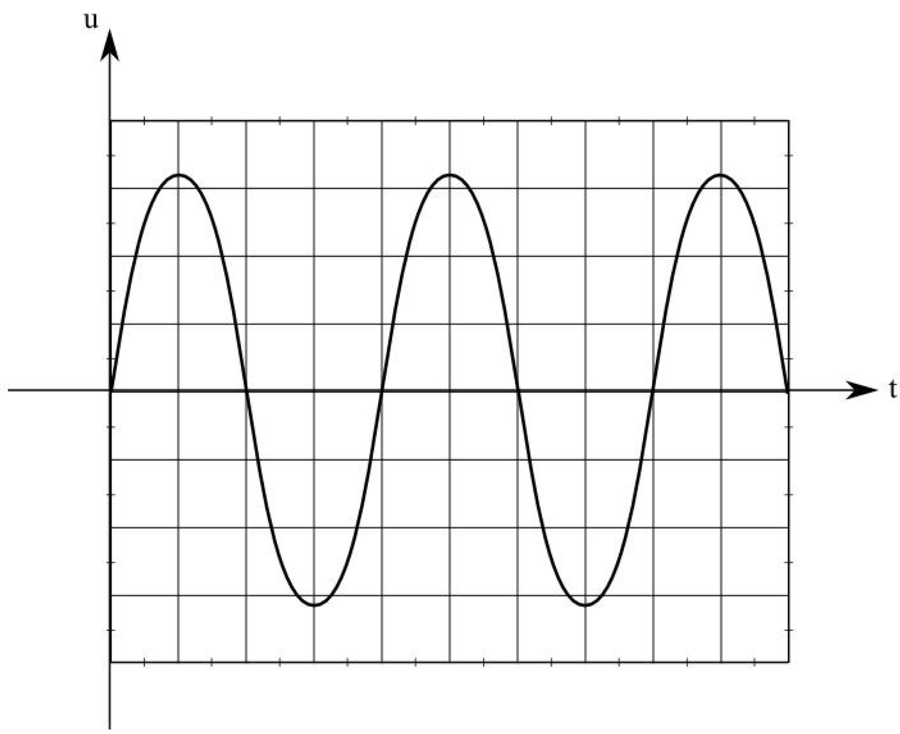


Schéma 2