

# CHAPITRE 15

## ALI, Filtrage actif

Les filtres passifs sont simples à mettre en œuvre car ils n'ont pas besoin d'être alimentés, mais ils sont limités en termes d'application. Des problèmes se posent notamment lorsque l'on veut utiliser plusieurs filtres en cascade pour réaliser des opérations successives sur un signal. Nous mettrons en évidence ce problème dans la première partie, en introduisant les concepts d'impédance d'entrée et de sortie d'un quadripôle.

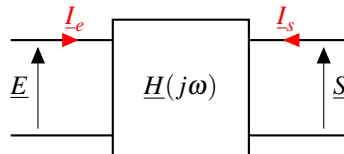
La plupart des filtres analogiques utilisés en électronique contiennent des composants actifs. On s'intéresse en particulier à l'un d'entre eux, *l'amplificateur linéaire intégré* (ou ALI). L'objectif de ce chapitre consiste à s'appuyer sur un modèle simplifié de ce composant, afin de comprendre comment réaliser quelques montages simples présentant des avantages notables par rapport aux filtres passifs étudiés au chapitre précédent.

### 1 Impédances d'entrée et de sortie d'un quadripôle

#### 1.1 Définitions

##### Impédances d'entrée et de sortie d'un quadripôle

Considérons un quadripôle caractérisé dans l'espace complexe par ses tensions d'entrée  $\underline{E}$  et de sortie  $\underline{S}$  ainsi que ses courants d'entrée  $\underline{I}_e$  et de sortie  $\underline{I}_s$ .



L'*impédance d'entrée* du quadripôle  $\underline{Z}_e$  est définie comme l'impédance du quadripôle, vue depuis les bornes d'entrée, lorsque la sortie est ouverte. En termes mathématique cela revient à dire que :

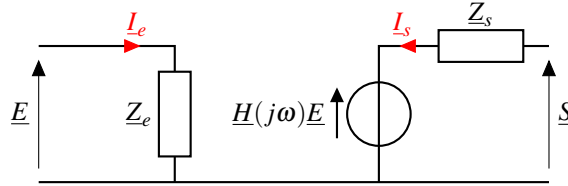
$$\underline{Z}_e = \left( \frac{\underline{E}}{\underline{I}_e} \right)_{\underline{I}_s=0}$$

L'*impédance de sortie* du quadripôle  $\underline{Z}_s$  est définie comme l'impédance du quadripôle, vue depuis les bornes de sortie, lorsque l'entrée est-cour-circuitée. En termes mathématique cela revient à dire que :

$$\underline{Z}_s = \left( \frac{\underline{S}}{\underline{I}_s} \right)_{\underline{E}=0}$$

## 1.2 Schéma équivalent d'un quadripôle

Un quadripôle de fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$ , d'impédances  $\underline{Z}_e$  en entrée et  $\underline{Z}_s$  en sortie peut être représenté schématiquement de la manière suivante :

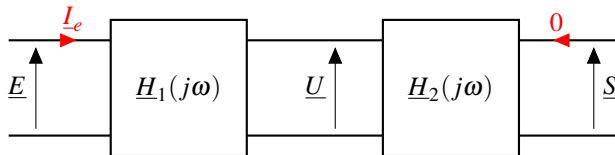


Du point de vue de ses bornes d'entrée le quadripôle se comporte comme une simple impédance  $\underline{Z}_e$ .

Du point de vue de ses bornes de sortie le quadripôle se comporte comme un générateur linéaire de force électromotrice  $\underline{H}(j\omega)\underline{E}$  et d'impédance  $\underline{Z}_s$ .

## 1.3 Association de deux quadripôles en cascade

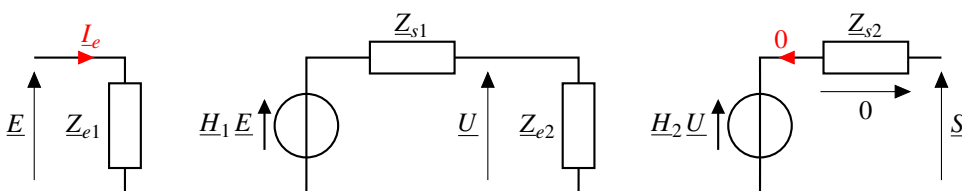
Il est fréquent que l'on souhaite réaliser plusieurs opérations successives sur un signal pour en extraire de l'information et/ou le mettre en forme (lissage, amplification, réduction de bruit, élimination d'une composante continue, intégration/dérivation, etc). On s'intéresse au dispositif ci-dessous dans lequel on place deux quadripôles en cascade. Pour simplifier nous supposons que la sortie est ouverte.



Idéalement on souhaiterait que les deux quadripôles se comportent indépendamment l'un de l'autre, c'est-à-dire que la fonction de transfert globale du circuit soit simplement égale au produit des fonctions de transfert successives :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \underline{H}_1(j\omega)\underline{H}_2(j\omega)$$

En pratique les deux quadripôles s'influencent réciproquement et la fonction de transfert globale dépend non seulement des propriétés individuelles de chaque quadripôle, mais également de leur interaction. Pour le comprendre il faut remplacer les quadripôles par leur schéma équivalent :



Puisque le courant de sortie est nul alors la tension aux bornes de  $\underline{Z}_{s2}$  est nulle et d'après la loi des mailles :  $\underline{S} = \underline{H}_2(j\omega)\underline{U}$ , avec  $\underline{U}$  la tension complexe qui est à la fois en sortie du premier quadripôle et en entrée du second.

Les impédances  $\underline{Z}_{s1}$  et  $\underline{Z}_{e2}$  sont associées en série donc on peut déterminer la tension  $\underline{U}$  grâce à la loi du pont diviseur de tension :  $\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1(j\omega) \underline{E}$ .

On peut conclure et déterminer la fonction de transfert globale du montage :

$$\underline{S} = \underline{H}_2(j\omega) \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1(j\omega) \underline{E} \iff \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega)}$$

Cette expression fait intervenir :

- le terme  $\underline{H}_1(j\omega)\underline{H}_2(j\omega)$  qui traduit les propriétés individuelles des deux quadripôles ;
- le terme  $\frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}}$  qui traduit l'interdépendance des quadripôles.

On note qu'en l'absence du terme d'interdépendance on aurait effectivement  $\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$ . Ce terme dépend de l'impédance de sortie du premier montage et de l'impédance d'entrée du second. Dans l'idéal on souhaiterait **qu'il soit égal à 1** et il existe deux manières de le réaliser concrètement :

Si l'impédance de sortie  $\underline{Z}_{s1}$  est nulle alors le terme d'interdépendance est égal à 1, *quelque soit la valeur de  $\underline{Z}_{e2}$* . **Le comportement d'un quadripôle est indépendant du montage branché en sortie si  $\underline{Z}_s = 0$ .**

Si l'impédance d'entrée  $\underline{Z}_{e2}$  est infinie alors le terme d'interdépendance est égal à 1, *quelque soit la valeur de  $\underline{Z}_{s1}$* . **Le comportement d'un quadripôle est indépendant du montage branché en entrée si  $\underline{Z}_e = \infty$ .**

### Impédances d'entrée et de sortie d'un quadripôle idéal

Le comportement d'un quadripôle est indépendant du montage dans lequel il est inséré à condition que :

$$\boxed{\underline{Z}_e = \infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{Z}_s = 0}$$

Quand on place plusieurs quadripôles idéaux en cascade ils se comportent indépendamment les uns des autres et la fonction de transfert globale est égale au produit des fonctions de transfert individuelles :

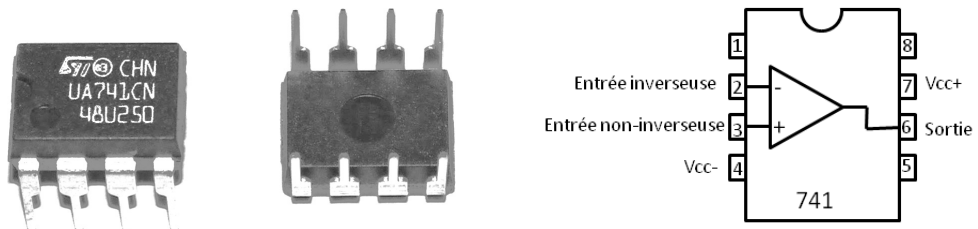
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega) \times \dots}$$

Il est impossible d'obtenir ces propriétés avec des filtres passifs, en revanche nous verrons que cela devient possible si l'on utilise un ALI. **C'est l'un des atouts majeurs des filtres actifs, comparés aux filtres passifs.**

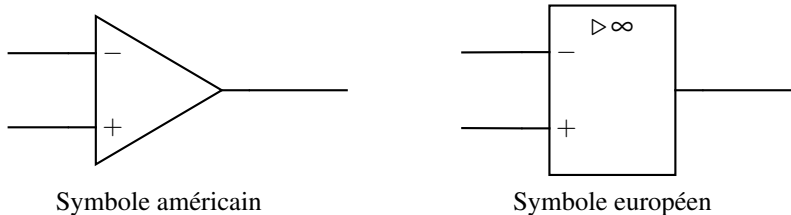
## 2 Présentation de l'amplificateur linéaire intégré (ALI)

### 2.1 Schéma-modèle

L'ALI, connu également sous le nom *d'amplificateur opérationnel*, est un circuit intégré que l'on trouve généralement monté sur un boîtier à huit broches (ou huit "pattes", voir images ci-dessous, à gauche). Ces broches sont numérotées et une gravure semi-circulaire permet de distinguer les deux côtés du boîtier. La figure ci-dessous à droite montre le rôle joué par certaines des broches ; nous détaillerons ces indications un peu plus tard dans ce paragraphe.



L'ALI a une structure interne (réalisée entre autres avec des transistors) que nous ne détaillerons pas. Par la suite nous envisagerons ce composant comme une boîte noire dont les propriétés générales seront admises. On représente ci-dessous le schéma-modèle d'un ALI dans sa version américaine et européenne. Sur cette dernière le triangle suivi du symbole infini signifie que l'ALI est **idéal**, nous reviendrons plus tard sur la signification de ce terme.



On distingue trois connexions sur ce schéma simplifié :

- l'entrée inverseuse (notée  $-$ , broche 2) ;
- l'entrée non-inverseuse (notée  $+$ , broche 3) ;
- la sortie (côté droit du schéma, broche 6).

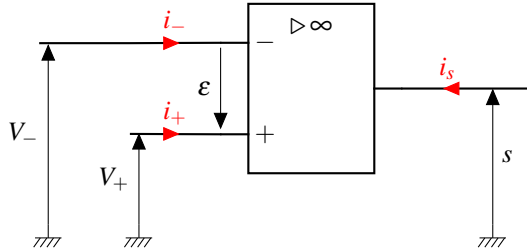
L'ALI est un composant actif, ce qui signifie qu'il doit être alimenté à l'aide d'une source extérieure pour fonctionner normalement. Cette alimentation s'effectue *via* deux bornes de connexions :

- la borne d'alimentation positive (notée  $V_{cc+}$ , broche 7) ;
- la borne d'alimentation négative (notée  $V_{cc-}$ , broche 4).

On s'arrange généralement pour que les potentiels électriques des deux bornes d'alimentation soient opposés. Les valeurs typiques sont :  $V_{cc+} = 15\text{V}$  et  $V_{cc-} = -15\text{V}$ . Pour alléger les schémas on ne représente pas les bornes d'alimentation sur le schéma-modèle.

## 2.2 Vocabulaire et notations

Le schéma ci-dessous introduit les notations utiles.



La tension  $V_-$  à l'entrée inverseuse, la tension  $V_+$  à l'entrée non-inverseuse et la tension de sortie  $s$  sont mesurées par rapport à une même *masse* (Celle-ci correspond à la borne centrale de l'alimentation  $-15\text{V}/0\text{V}/+15\text{V}$ ), qui est elle-même connectée à la Terre.

La tension entre les deux bornes d'entrée  $\epsilon = V_+ - V_-$  est appelée *tension différentielle*.

Les intensités  $i_-$  et  $i_+$  sont appelés *courants de polarisation*, tandis que  $i_s$  est appelée *courant de sortie*.

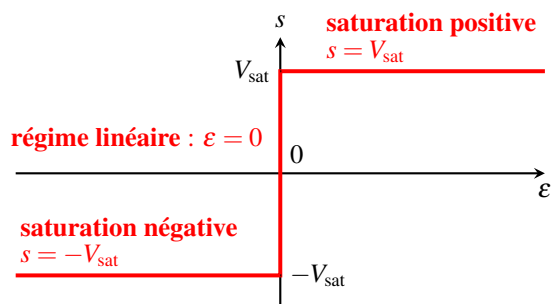
## 2.3 Modèle de l'ALI idéal

Nous étudions dans ce chapitre un modèle simplifié et idéalisé de l'ALI, qui néglige la plupart de ses limitations. Il permet de comprendre dans les grandes lignes l'intérêt que peut présenter ce composant pour réaliser certaines fonctions en électronique. En pratique il est important de connaître les conditions dans lesquelles ce modèle simple s'applique, autrement dit il faut en connaître les limites. Cela relève du programme de deuxième année en filière PSI.

### 2.3.1 Deux types de fonctionnement : régime linéaire et régime saturé

On représente sur la figure ci-dessous la *caractéristique de transfert statique* d'un ALI idéal, c'est-à-dire le graphe qui indique la valeur de la tension de sortie  $s$  en fonction de celle de la tension différentielle, en régime stationnaire.

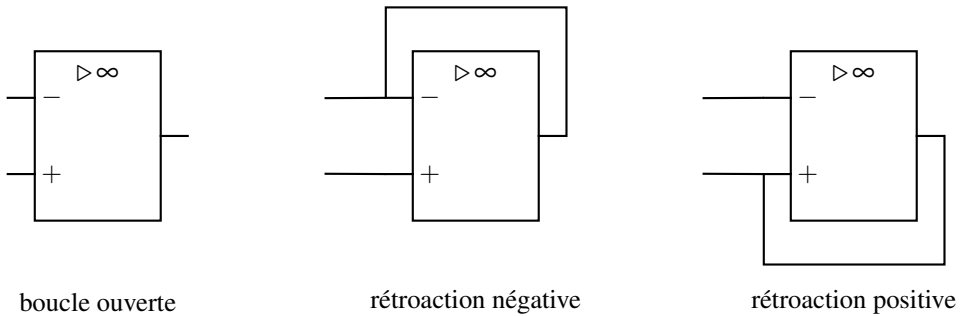
Suivant les circonstances un ALI idéal peut fonctionner :



- en *régime linéaire* : dans ce cas  $\epsilon = 0 \iff V_+ = V_-$  et la tension de sortie est bornées par deux *tensions de saturation*  $\pm V_{\text{sat}}$ , avec  $V_{\text{sat}}$  typiquement égale à  $15\text{V}$  ;
- en *régime saturé* : dans ce cas la tension de sortie est égale à  $V_{\text{sat}}$  (saturation positive :  $\epsilon > 0$ ) ou bien  $-V_{\text{sat}}$  (saturation négative :  $\epsilon < 0$ ).

### 2.3.2 Rétroaction

Dans un montage, la sortie d'un ALI est souvent connectée à l'une des voies d'entrée *via* une boucle de rétroaction. Cette boucle peut être un simple court-circuit mais elle peut également contenir des dipôles. En l'absence de rétroaction on dit que l'ALI est en *boucle ouverte*.



boucle ouverte

rétroaction négative

rétroaction positive

Par la suite nous admettrons la propriété suivante :

#### Condition de fonctionnement en régime linéaire

Un ALI idéal ne peut fonctionner en régime linéaire qu'en présence d'une **rétroaction négative**. Dans le cas contraire (boucle ouverte ou rétroaction positive), on se trouve nécessairement en régime saturé.

Dans ce chapitre nous étudierons uniquement des montages dans lesquels l'ALI fonctionne en régime linéaire.

### 2.3.3 Courants de polarisation

Les courants de polarisation d'un ALI réel sont très faibles (de l'ordre du nanoampère). Dans le modèle idéal on fait l'approximation que les courants de polarisation **sont nuls**, quelque soit son régime de fonctionnement.

### 2.3.4 Bilan

#### Modèle de l'ALI idéal

Un ALI idéal est caractérisé par :

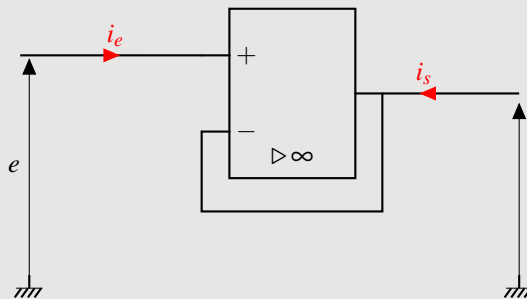
- des courants de polarisation nuls :  $i_- = i_+ = 0$  ;
- $\varepsilon = 0 \iff V_+ = V_-$  en régime linéaire (présence d'une rétroaction négative) ;
- $-V_{\text{sat}} < s < V_{\text{sat}}$  en régime linéaire.

### 3 Étude d'un montage à ALI

#### 3.1 Premier exemple : le montage suiveur

##### Exemple

On représente ci-dessous le schéma du montage suiveur, dans lequel l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



1. Justifier que l'ALI peut fonctionner en régime linéaire.
2. Déterminer la fonction de transfert du montage.
3. Quelle est son impédance d'entrée ? son impédance de sortie ?

##### ► Justifier le régime linéaire

1. Il y a présence d'une **boucle de rétroaction négative** donc l'ALI peut fonctionner en régime linéaire.

##### ► Exploiter les propriétés de l'ALI idéal en régime linéaire

2. L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire donc **la tension différentielle est nulle** :

$V_+ = V_-$ . Or  $V_+ = e$  et  $V_- = s$  donc :

$$e = s \iff \boxed{H = 1}$$

Le montage suiveur a une fonction de transfert unitaire à toute fréquence. Ce montage transmet tout signal sans modification.

3. Pour calculer l'impédance d'entrée on suppose que le courant de sortie est nul (voir définition de  $Z_e$  au paragraphe 1.1) . D'après le schéma :  $i_e = i_+$ . Or l'ALI est idéal donc **les courants de polarisation sont nuls** :  $i_+ = i_- = 0$ . On conclut que  $i_e = 0$  donc l'impédance d'entrée est infinie :  $\boxed{Z_e = \infty}$ .

Pour calculer l'impédance de sortie on suppose que l'entrée est court-circuitée ( $e = 0$ ). D'après les calculs de la question 2 on conclut que  $s = 0$  donc l'impédance de sortie est nulle :  $\boxed{Z_s = 0}$ .

Pour les montages contenant un ALI, on peut retenir que :

- $Z_e = \infty$  si l'entrée du montage est directement connectée à la borne + ou - d'un ALI idéal car dans ce cas  $i_e = 0$  quelque soit la tension d'entrée  $e$ .
- $Z_s = 0$  si la tension de sortie est indépendante du courant de sortie. Nous verrons que c'est le cas pour **tous les montages** au programme de ce chapitre.

### Application 1

La sortie d'un capteur est modélisée par un générateur de Thévenin de force électromotrice  $E = 100\text{V}$  et de résistance interne  $R_0 = 10\text{k}\Omega$ . Le capteur est connecté à une résistance de charge  $R = 1\text{k}\Omega$ , soit directement (figure 1) soit avec un montage suiveur intercalé (figure 2).

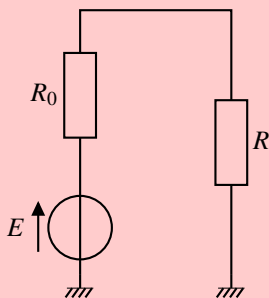


Figure 1

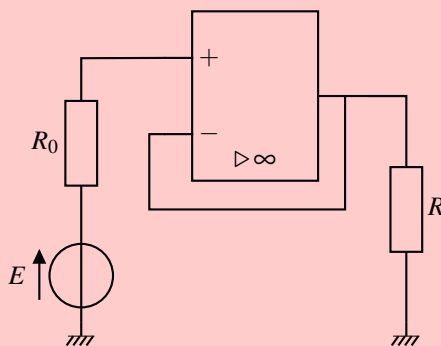


Figure 2

1. Calculer la puissance reçue par la résistance  $R$  pour le montage de la figure 1.
2. Même question pour le montage de la figure 2.
3. Conclure quant à l'intérêt d'utiliser un montage suiveur pour exploiter le capteur. Exploiter notamment en quoi l'impédance d'entrée du montage suiveur présente ici un avantage.

## 3.2 Montages de type inverseur ou non-inverseur

Il y a quatre montages au programme de PCSI : suiveur, amplificateur inverseur, amplificateur non-inverseur, intégrateur. Nous allons voir qu'on peut tous les étudier à partir de deux schémas plus généraux. On les présente dans ce paragraphe, l'un sous la forme d'un exercice corrigé et l'autre sous la forme d'un exercice d'application. L'ALI sera toujours supposé idéal et en régime linéaire. Pour tous ces montages vous devrez savoir :

- calculer la fonction de transfert,
- évaluer l'impédance d'entrée (l'impédance de sortie sera toujours nulle).

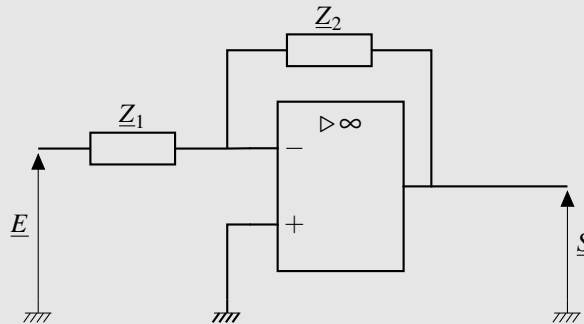


**En résumé**

- Justifier le régime linéaire par l'existence d'une rétroaction négative ;
- Rappeler les propriétés de l'ALI idéal en régime linéaire :  $V_+ = V_-$  et  $i_+ = i_- = 0$  ;
- Annoter le schéma (indiquer notamment que les courants de polarisation sont nuls) ;
- Écrire une **loi des nœuds en termes de potentiels** ;
- Utiliser  $V_+ = V_-$  pour obtenir la fonction de transfert ;
- Pour l'impédance d'entrée il y a deux cas de figure à connaître. Si l'entrée du montage est directement connectée à la borne + ou - de l'ALI alors  $\underline{Z}_e = \infty$  (voir paragraphe précédent). L'autre cas de figure est présenté sur l'exemple qui suit.

**Exemple**

On étudie le quadripôle ci-dessous, avec  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  des impédances quelconques (montage de type "inverseur"). On suppose que l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.

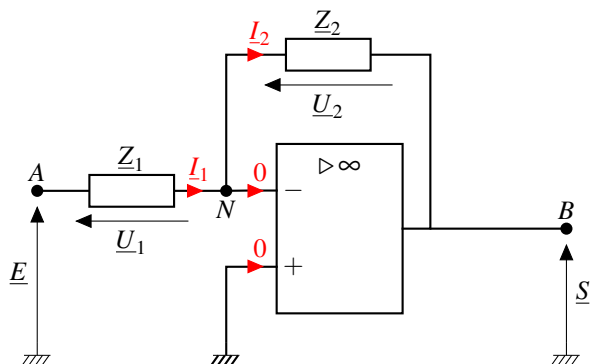


1. Déterminer la fonction de transfert de ce quadripôle.
2. Exprimer son impédance d'entrée.
3. Quel nom donne-t-on à ce montage si  $\underline{Z}_1 = R_1$  et  $\underline{Z}_2 = R_2 > R_1$  ? Si  $\underline{Z}_1 = R$  et  $\underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$  ?

**► Annoter le schéma**

1. L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire donc  $V_+ = V_- = 0$  et  $i_+ = i_- = 0$ . Le schéma annoté est en page suivante. On note respectivement  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  les intensités dans les branches des impédances  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$ . On note  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$  la tension à leurs bornes. On note que ces tensions peuvent être écrites comme des différences de potentiel (on s'en servira plus loin) :

$$\underline{U}_1 = \underline{V}_A - \underline{V}_N \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = \underline{V}_N - \underline{V}_B$$



► **Identifier les potentiels du circuit**

La tension d'entrée s'écrit comme la différence de potentiels suivante :  $\underline{E} = \underline{V}_A - \underline{V}_{\text{masse}}$ , or le potentiel de la masse est nul par définition donc  $\underline{E} = \underline{V}_A$ . Le même principe nous conduit à dire que  $\underline{S} = \underline{V}_B$ .

On remarque également sur ce schéma que  $\underline{V}_- = \underline{V}_N$  et  $\underline{V}_+ = 0$  (connexion à la masse).

► **Utiliser la loi des nœuds en termes de potentiels**

On écrit la loi des nœuds en  $N$  :  $I_1 = I_2$  (car  $I_- = 0$ ). Les impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  sont **en série**. On transforme la loi des nœuds en appliquant la loi d'Ohm à chaque dipôle (attention à la convention !), puis on écrit les tensions  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$  sous la forme d'une différence de potentiel.

$$I_1 = I_2 \iff \frac{\underline{U}_1}{Z_1} = \frac{\underline{U}_2}{Z_2} \iff \frac{\underline{E} - \underline{V}_-}{Z_1} = \frac{\underline{V}_- - \underline{S}}{Z_2}$$

► **Exploiter  $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$**

L'entrée non-inverseuse est connectée à la masse donc on peut écrire :  $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$ . La loi des nœuds conduit alors à :

$$\frac{\underline{E}}{Z_1} = -\frac{\underline{S}}{Z_2} \iff \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = -\frac{Z_2}{Z_1}}$$

► **Déterminer une impédance d'entrée**

2. L'impédance d'entrée vaut  $\underline{Z}_e = \underline{E}/\underline{I}_e$ , avec ici  $\underline{E} = \underline{U}_1$  (justifié plus haut) et  $\underline{I}_e = \underline{I}_1$  (entrée du quadripôle connectée à  $Z_1$ ). On conclut grâce à la loi d'Ohm :

$$\boxed{\underline{Z}_e = \frac{\underline{E}}{\underline{I}_e} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = Z_1}$$

On retient que la présence d'un ALI ne garantit pas que l'impédance d'entrée est infinie. Dans le cas où l'entrée du quadripôle est située du côté de la boucle de rétroaction négative (montages de type "inverseur"), le courant d'entrée n'est pas nul donc l'impédance d'entrée est finie.

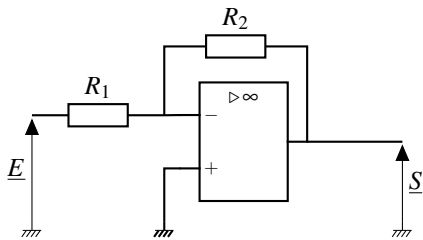
► **Reconnaître les montages classiques à ALI**

4. Dans le cas où  $\underline{Z}_1 = R_1$  et  $\underline{Z}_2 = R_2 > R_1$  la fonction de transfert vaut  $\underline{H} = -\frac{R_2}{R_1}$ . La tension d'entrée est amplifiée (car  $R_2 > R_1$ ) et il y a changement de signe : il s'agit du montage **amplificateur inverseur**.

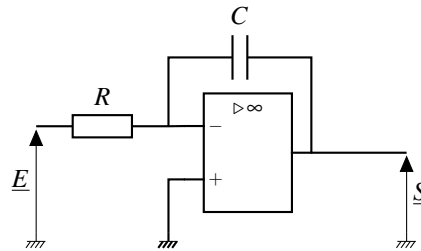
Si  $\underline{Z}_1 = R$  et  $\underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$  alors  $\underline{H} = -\frac{1}{jRC\omega}$ ; la tension de sortie est proportionnelle à la primitive de la tension d'entrée : il s'agit du montage **intégrateur**.

$$\underline{S} = -\frac{1}{RC} \times \frac{\underline{E}}{j\omega} \xrightarrow{\mathbb{R}} s(t) = -\frac{1}{RC} \int e(t) dt$$

Contrairement aux filtres passifs pseudo-intégrateurs étudiés au chapitre précédent, ce montage est intégrateur **à toute fréquence**.



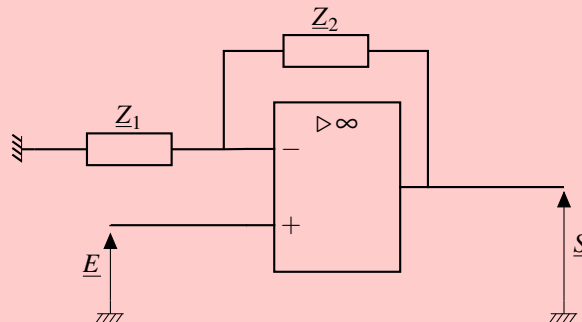
Montage amplificateur inverseur



Montage intégrateur

**Application 2**

On étudie le quadripôle ci-dessous, avec  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  des impédances quelconques (montage de type "non-inverseur"). On suppose que l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



1. Déterminer la fonction de transfert de ce quadripôle.
2. Exprimer son impédance d'entrée.
3. Quel nom donne-t-on à ce montage si  $\underline{Z}_1 = R_1$  et  $\underline{Z}_2 = R_2$  ? Si  $\underline{Z}_1 = \infty$  et  $\underline{Z}_2 = 0$  ?