Chapitre 16 : Ondes progressives et stationnaires

1 Nature d'un signal physique

1.1 Notion d'onde

Une **onde** est une vibration susceptible de se propager dans l'espace de proche en proche. Certaines ondes ont besoin d'un milieu matériel pour se propager, tandis que d'autres peuvent se propager même dans le vide.

On appelle **signal** toute grandeur physique qui signale le passage d'une onde.

En termes mathématiques une onde est décrite par une grandeur physique $y(M,t)$ qui dépend **à la fois de la position et du temps**. Nous verrons dans ce chapitre quel genre de fonction mathématique permet de décrire une onde très simple qui se propage à vitesse constante, dans une seule direction, sans déformation ni atténuation.

1.2 Nature d'une onde

Il existe de nombreux phénomènes physiques susceptibles de produire des ondes :

On parle **d'onde mécanique** lorsque celle-ci s'accompagne d'une vibration des constituants d'un milieu matériel : onde sur une corde tendue, vagues, séismes, ondes sonores, etc.

On parle **d'onde électrique** dans le cas particulier où ce sont les charges libres d'un conducteur qui vibrent de proche en proche. Les signaux électriques transmis par voie filaire (câble ADSL, câble coaxial) en sont des exemples.

On parle **d'onde électromagnétique** lorsque celle-ci s'accompagne d'une vibration du champ électromagnétique. Contrairement aux deux types d'ondes précédents, les ondes EM n'ont pas besoin d'un milieu matériel pour se propager. Rayons X, UV, lumière visible, infrarouges ou ondes radio sont différents exemples d'ondes EM, que l'on distingue suivant la valeur de leur fréquence.

1.3 Onde transversale, longitudinale

Une onde mécanique se propage dans un milieu matériel. Lors du passage de l'onde, les constituants du milieu se mettent à osciller autour de leur position d'équilibre.

Lorsque la vitesse de déplacement des constituants du milieu est *colinéaire* à la direction de propagation de l'onde, on dit que l'onde est **longitudinale** (onde acoustique, onde sismique primaire, etc).

Lorsque la vitesse de déplacement des constituants du milieu est orthogonale à la direction de propagation de l'onde, on dit que l'onde est **transversale** (ou transverse) (onde le long d'une corde, vague, onde sismique secondaire, etc).

2 Onde progressive

2.1 Introduction

<u>Def</u> : Une onde est dite **progressive** lorsque la propagation s'accompagne d'un **transport d'énergie** dans l'espace.

La direction de propagation de l'onde s'assimile à la direction dans laquelle se propage cette énergie. Dans cette partie, nous aborderons la propagation dans le cas le plus simple, celui d'un milieu :

- **illimité** : nous ne tiendrons pas compte des effets dûs à la taille finie du milieu,
- **transparent** : le milieu n'absorbe pas l'énergie transportée par l'onde,
- **non dispersif** : La vitesse de propagation d'une onde sinusoïdale est la même à toute fréquence.

Sous ces hypothèses, la propagation d'une onde vérifie la propriété suivante :

Dans un milieu illimité, non dispersif et transparent, une onde garde la même "forme" à tout instant. Entre deux dates, la propagation se traduit simplement par une **translation** du signal, sans déformation.

La vitesse de propagation de l'onde est appelée **célérité** (notée c).

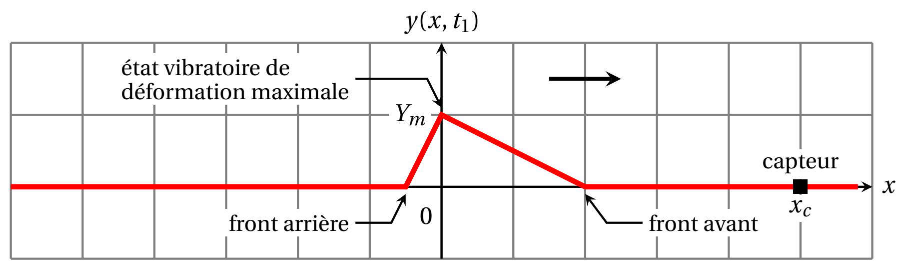
2.2 Phénomène propagatif, vision spatialle et temporelle

On considère une onde progressive qui se propage dans la direction (Ox) et est décrite par le signal $y(x,t)$. On peut représenter graphiquement l'évolution de l'onde :

- avec le graphe $x \mapsto y(x,t)$ qui représente l'allure spatiale de l'onde à un instant t donné (point de vue spatial).
- avec le graphe $t \mapsto y(x,t)$ qui représente la vibration temporelle dans une position x donnée (point de vue temporel).

2.2.1 État vibratoire, front avant, front arrière

On représente ci-dessous l'allure spatiale de l'onde à une date t_1 donnée. On suppose qu'elle se propage vers les x croissants.



Un état vibratoire correspond à une valeur particulière prise par le signal au cours du passage de l'onde. On a représenté par exemple l'état vibratoire pour lequel la déformation est maximale. Ici on considère que **chaque état vibratoire se déplace à la vitesse constante c vers les x croissants** (puisque l'onde ne se déforme pas).

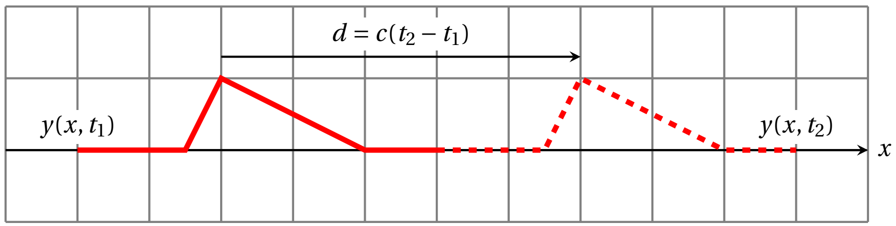
Imaginons un capteur, placé dans une position x_c donnée, et qui enregistre la vibration $t \mapsto y(x_c, t)$ au cours du temps.

- on appelle **front avant de l'onde** l'état vibratoire à partir duquel le capteur va commencer à enregistrer un signal ;
- on appelle **front arrière de l'onde** l'état vibratoire à partir duquel le capteur va cesser d'enregistrer un signal.

Chaque état vibratoire correspond à une valeur particulière du signal y. Par exemple l'état vibratoire de déformation maximal correspond à $\boxed{y = Y_m}$.

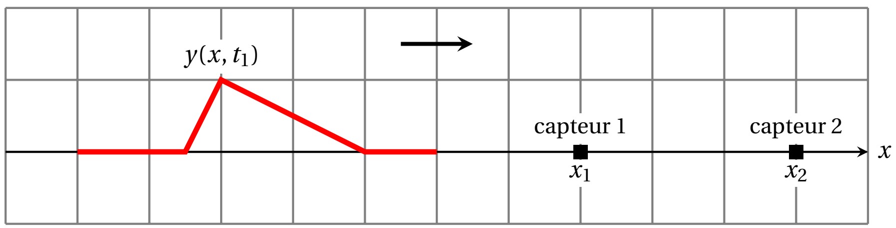
2.2.2 Point de vue spatial, distance de propagation

On voudrait tracer l'allure de l'onde $x \mapsto y(x, t_2)$ à la date $t_2 > t_1$. Entre ces deux dates l'onde, qui avance à vitesse constante c, s'est propagée sur une distance $d = c(t_2 - t_1)$. Par conséquent **l'allure à la date t_2 se déduit de celle à la date t_1 par une simple translation de $d = c(t_2 - t_1)$ vers les x croissants**.

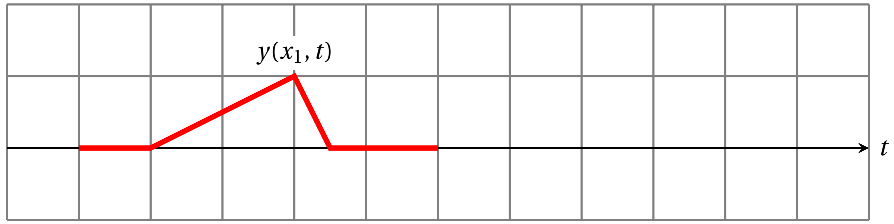


2.2.3 Passage du spatial au temporel

Imaginons que l'on place un capteur fixe situé en x_1 qui enregistre la vibration lors du passage de l'onde.

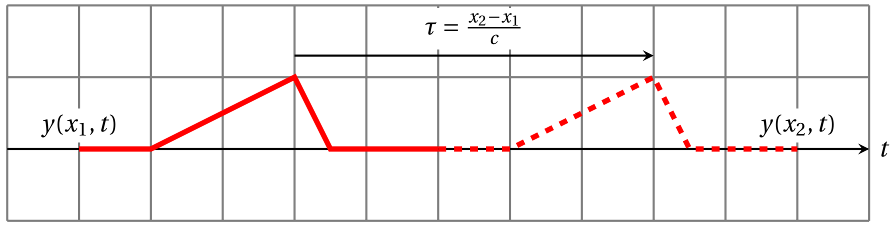


Le capteur enregistre d'abord le passage du front avant de l'onde (front lentement montant), puis celui du front arrière de l'onde (front rapidement descendant). On peut alors tracer qualitativement l'allure du signal temporel enregistré par le capteur (voir figure ci-dessous).



2.2.4 Point de vue temporel, retard temporel dû à la propagation

On voudrait maintenant tracer l'allure du signal enregistré par un deuxième capteur situé en $x_2 > x_1$. Entre ces deux positions l'onde avance à la vitesse constante c donc elle met une durée $\tau = \frac{x_2 - x_1}{c}$ pour se propager d'un capteur à l'autre. Ainsi le signal enregistré en x_2 s'obtient à partir de celui enregistré en x_1 **par une simple translation de $\tau = \frac{x_2 - x_1}{c}$ vers le futur**. On dit aussi que le signal mesuré en x_2 est en retard de τ sur celui mesuré en x_1.



2.2.5 Propagation dans le sens des x croissants

Pour décrire mathématiquement une onde progressive qui se propage à la vitesse constante c vers les x croissants, on peut utiliser l'un des raisonnements suivants :

- le signal mesuré en x à la date t est le même qui celui qui est mesuré en $x - ct$ à la date $t = 0$ (en reculant dans le temps d'une durée t l'onde "recule" de ct) : $\boxed{\forall (x, t) \ : \ y(x, t) = y(x - ct, 0)}$.
- le signal mesuré en x à la date t est le même qui celui qui est mesuré en $x = 0$ à la date $t - \frac{x}{c}$ (en reculant dans le temps de $\frac{x}{c}$ l'onde "recule" de x) : $\boxed{\forall (x, t) \ : \ y(x, t) = y(0, t - \frac{x}{c})}$.

Mathématiquement, on peut caractériser une onde progressive qui se propage avec une célérité c , dans le sens des x croissants, par une fonction du type :

$$\boxed{y(x, t) = f(x - ct) \quad \text{ou} \quad y(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

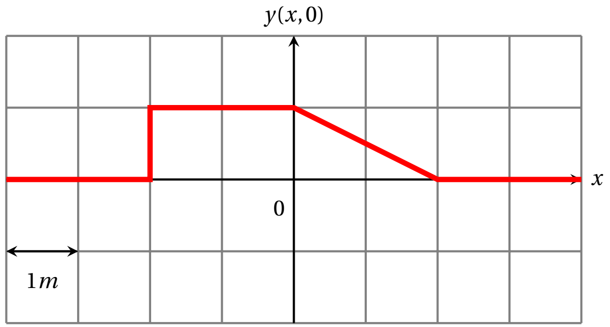
Ces deux écritures sont équivalentes. La première est plus adaptée au tracé de la forme de l'onde à un instant t donné. La seconde est plus adaptée au tracé de la vibration d'un point de l'axe au cours du temps.

2.2.6 Propagation dans le sens des x décroissants

On considère une onde progressive qui se propage dans la direction (Ox), dans le sens des x décroissants. Le signal transmis par cette onde peut s'écrire sous l'une de ces deux formes :

$$\boxed{s(x,t) = f(x+ct) \quad \text{ou} \quad s(x,t) = g\left(t+\frac{x}{c}\right)}$$

2.3 Evolution spatiale et temporelle d'une onde progressive



Le graphe ci-dessus représente, à la date $t = 0$, la forme d'une onde progressive se propageant le long d'un axe (Ox) dans le sens des x croissants avec une célérité $c = 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

1. Tracer la forme de l'onde aux dates $t = 1\,\mathrm{s}$ et $t = 3\,\mathrm{s}$.
2. Tracer l'allure de la déformation subie par le point d'abscisse $x = 1\,\mathrm{m}$ au cours du temps.

3 Onde progressive harmonique

3.1 Définition

Lorsqu'une onde progressive a une forme **sinusoïdale**, on dit qu'elle est **harmonique** :

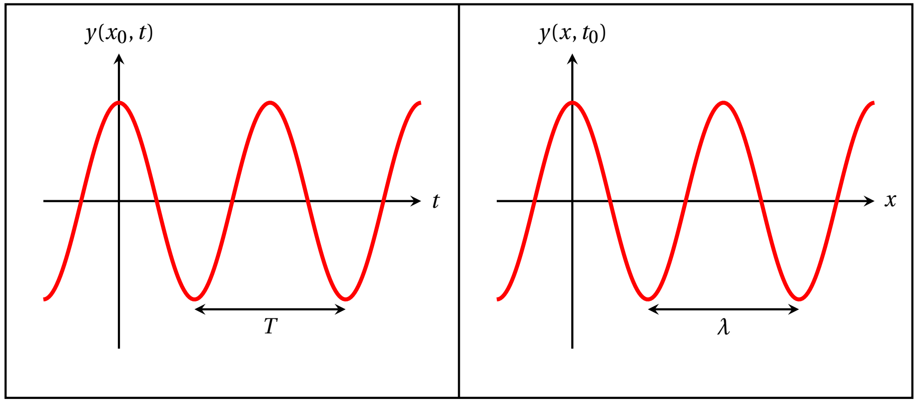
$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t-\dfrac{x}{c}\right)+\varphi_0\right) & \text{(vers les } x \text{ croissants)} \\ y(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t+\dfrac{x}{c}\right)+\varphi_0\right) & \text{(vers les } x \text{ décroissants)} \end{cases}$$

L'état vibratoire de l'onde, pour x et t donnés, est caractérisé par la valeur de sa **phase** :

$$\boxed{\phi(x,t) = \omega t \pm \frac{\omega}{c}x + \varphi_0}$$

3.2 Double périodicité spatiale et temporelle

Cette fonction présente une périodicité par rapport à la variable t : en un point d'abscisse x, l'onde varie sinusoïdalement dans le temps, avec une période $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.



Elle présente également une périodicité par rapport à la variable d'espace x. Si l'on prend une photo de l'onde à la date t, elle aura dans l'espace l'allure d'une d'une sinusoïde.

La **longueur d'onde** λ est la période spatiale d'une onde progressive harmonique. Elle dépend de la fréquence suivant la relation :

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$$

3.3 Vecteur d'onde

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé dans le sens de propagation d'une onde progressive harmonique. On définit le **vecteur d'onde** associé à cette onde progressive par :

$$\boxed{\vec{k} = k\vec{u} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}}$$

k représente la pulsation spatiale de l'onde progressive harmonique.

Avec le vecteur d'onde, on peut réécrire sous une forme différente l'expression d'une onde progressive harmonique :

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) & \text{(vers les } x \text{ croissants)} \\ y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0) & \text{(vers les } x \text{ décroissants)} \end{cases}$$

3.4 Déphasage entre deux points de l'espace

Pour étudier la vibration de l'onde en un point d'abscisse x fixé, on peut écrire le signal sous la forme :

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi(x)) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \pm kx + \varphi_0$$

Tous les points de l'axe (Ox) vibrent de manière synchrone, à la pulsation ω, mais avec une phase à l'origine qui dépend de la position x. Par conséquent, entre deux points A et B distants de Δx, il apparaît un déphasage $\Delta\varphi$ tel que :

$$\boxed{\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta x}{\lambda}}$$

Où $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ est le retard dû à la propagation entre A et B.

3.5 Milieu dispersif

Def : Un milieu de propagation est **dispersif** si la vitesse de propagation d'une onde sinusoïdale dépend de la fréquence.

Dans un milieu dispersif, une onde progressive non harmonique se déforme au cours de sa propagation car elle contient plusieurs composantes harmoniques de fréquences différentes qui se propagent avec des vitesses différentes.

4 Onde stationnaire

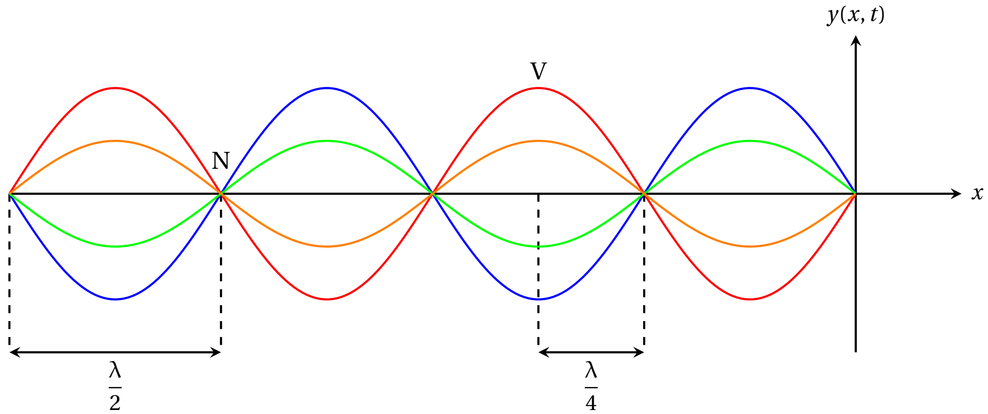
4.1 Réflexion d'une onde progressive harmonique

La réflexion d'une onde progressive harmonique d'amplitude A sur une paroi donne naissance, dans le milieu de propagation, à une **onde stationnaire** (OS) de la forme :

$$\boxed{y(x,t) = 2A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \psi\right)}$$

Une onde stationnaire présente la particularité de posséder :

- des **noeuds** de vibration, c'est-à-dire des points de l'espace immobiles à tout instant. Deux noeuds consécutifs sont distants de $\lambda/2$.
- des **ventres** de vibrations, c'est-à-dire des points de l'espace qui oscillent avec une amplitude maximale (ici $2S_0$). Deux ventres consécutifs sont distants de $\lambda/2$. Un ventre et un noeud consécutifs sont distants de $\lambda/4$.



4.2 Mouvement d'une corde entre deux extrémités fixes

Lorsqu'une onde apparait sur une corde de longueur L fixée au niveau de ses deux extrémités (d'abscisses $x = 0$ et $x = L$ par exemple), elle subit des réflexions multiples sur chaque extrémité. On peut montrer que l'onde résultante est encore une onde stationnaire, telle qu'on l'a vue dans le paragraphe précédent.

L'OS résultante doit vérifier cette fois deux conditions aux limites : $s(0,t) = 0\ \forall t$ et $s(L,t) = 0\ \forall t$. Il en résulte que la longueur d'onde de l'OS doit nécessairement vérifier la relation suivante :

$$\boxed{L = n\frac{\lambda}{2} \ \text{avec}\ n \in \mathbb{N}^* \longleftrightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

On dit que les longueurs d'onde sont **quantifiées**. La quasi-totalité des valeurs de λ sont interdites : seul un nombre discret de λ, celles vérifiant l'équation ci-dessus, sont possibles sur la corde. Il en va de même pour les fréquences, qui prennent uniquement les valeurs suivantes :

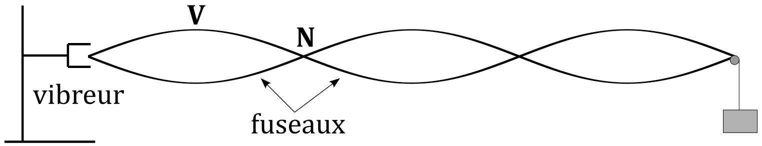
$$\boxed{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}}$$

Chaque valeur de n constitue un **mode propre** de vibration, associée à une fréquence f_n et une longueur d'onde λ_n.

- Le mode $n = 1$ est appelé le **fondamental**. La fréquence $f_1 = \frac{c}{2L}$ est appelée fréquence fondamentale.
- Les modes $n > 1$ sont appelés les **harmoniques** de rang n. On remarque que $f_n = nf_1$: les fréquences des harmoniques sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale.

4.3 Mise en évidence expérimentale des modes propres : corde de Melde

L'expérience de la corde de Melde consiste à faire vibrer l'une des extrémités d'une corde tendue de manière sinusoïdale pour imposer dans la corde une onde à la fréquence de l'excitateur.



Les vibrations de la corde sont quasi-nulles, sauf lorsque la fréquence est celle d'un mode propre. On voit alors apparaître des fuseaux, caractéristiques de l'apparition d'une onde stationnaire dans le système. Plus la fréquence augmente et plus le nombre de fuseaux augmente (normal car λ diminue lorsque f augmente).

4.4 Vibration quelconque entre deux extrémités fixes

Lorsqu'on fait vibrer une corde fixée en ses extrémités de manière quelconque, on peut montrer que l'onde résultante est une combinaison linéaire de tous les modes propres (il y en a le plus souvent une infinité) :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x + \psi_n)$$

Où les coefficients A_n , amplitudes associées à chaque harmonique, sont caractéristiques du signal $y(x,t)$.

Par analogie avec les ondes progressives, on peut définir le spectre d'une onde stationnaire à partir des différentes fréquences qui le composent et de leur poids respectif, quantifié par la valeur $|A_n|$.

Le son d'un instrument de musique est beaucoup plus complexe qu'une simple sinusoïde. Il est caractérisé à la fois par sa **note** (la fréquence fondamentale) et par son **timbre** (la richesse et l'intensité des harmoniques). La même note, jouée par deux instruments différents, produits des sensations très différentes chez l'auditeur. Par exemple, le diapason est un instrument de musique qui produit des notes très pures, dont les harmoniques sont quasiment absents.

4.5 Onde stationnaire acoustique dans une cavité

On peut obtenir des ondes stationnaires acoustiques en confinant une onde acoustique dans un espace clos. Pour simplifier l'étude, on se place dans une conduite cylindrique close à ses deux extrémités (instrument de type flûte). On se restreint à une propagation en une dimension. Une paroi rigide constitue pour l'onde stationnaire acoustique un **ventre de surpression**.

De même, si l'on ouvre l'une des extrémités du tube sur l'extérieur, on peut montrer que si le diamètre d de l'ouverture est tel que $d \ll \lambda$, alors l'extrémité libre constitue pour l'OS un **noeud de surpression**.