CHAPITRE 16 — Ondes progressives et stationnaires

Une onde est une perturbation d'un milieu qui se propage de proche en proche dans l'espace. Qu'elle soit mécanique (son, vague, corde vibrante), électrique (transmission de signaux par câble électrique) ou encore électromagnétique (lumière visible, signaux radio, rayons X), on mesure le passage d'une onde par l'intermédiaire d'une grandeur physique qui signale la perturbation du milieu. Par exemple une onde sonore crée une perturbation du champ de pression, une onde électromagnétique une perturbation du champ électromagnétique, une onde électrique une perturbation des courants et tensions au sein d'un réseau électrique.

Les phénomènes ondulatoires sont nombreux et variés ; leurs propriétés dépendent des caractéristiques du milieu. On s'intéresse dans ce chapitre à la propagation la plus simple qui soit, à savoir une propagation **unidirectionnelle et sans déformation**. Sans en expliquer les causes (cela relève du programme de deuxième année), nous admettons l'existence de telles ondes, qui conservent la même amplitude et la même forme tout au long de leur propagation. Notre objectif consiste à les décrire mathématiquement, en tant que **fonctions de la position et du temps**. Nous en verrons deux exemples :

- les ondes *progressives*, parmi lesquelles on insistera sur celles qui sont sinusoïdales ;
- les ondes *stationnaires*, qui résultent de la superposition d'ondes progressives.

1 Ondes progressives

1.1 Définition

Onde progressive

Une onde peut mettre en mouvement les constituants d'un milieu (c'est le cas des ondes mécaniques) mais elle ne transporte pas de matière (après le passage de l'onde chaque constituant du milieu retrouve sa position initiale de repos). En revanche une onde peut transporter **de l'énergie**, et dans ce cas on la nomme *onde progressive*.

C'est par exemple le cas du son produit par un instrument de musique, des vagues générées par la chute d'un caillou dans l'eau ou encore des signaux infrarouges émis par une télécommande. Il est à noter que lorsqu'une onde se propage dans plusieurs directions à la fois elle s'atténue au cours de sa propagation car l'énergie qu'elle transporte se répartit sur un espace de plus en plus grand. C'est ainsi que les vagues circulaires créées par la chute d'un caillou dans l'eau sont de moins en moins hautes à mesure qu'elles s'éloignent du point de chute ou encore qu'un son s'affaiblit lorsqu'on s'éloigne de la source. En revanche il n'y a pas d'atténuation si la propagation est unidirectionnelle et que le milieu n'est pas absorbant ; c'est le cas qui nous concerne dans ce chapitre.

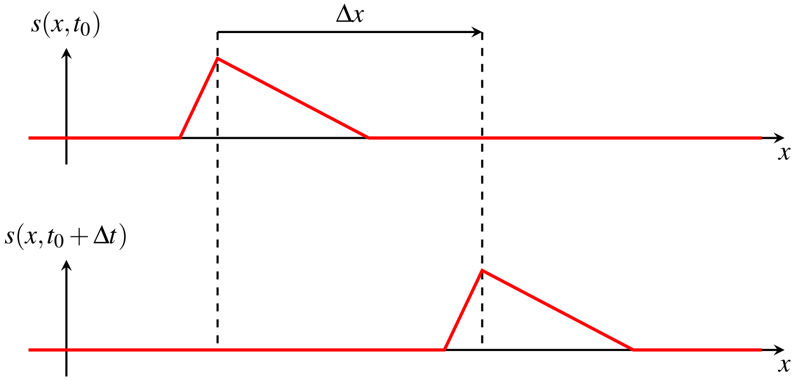
1.2 Célérité

On considère une onde qui se propage rectilignement le long d'un axe (Ox), vers les x croissants ou décroissants. On note $s(x,t)$ la perturbation du milieu en x, à la date t. On suppose que la propagation est illimitée dans l'espace et le temps. Pour simplifier l'étude de cette perturbation, on distinguera sa représentation spatiale et à sa représentation temporelle.

- La fonction $x \mapsto s(x,t)$ décrit l'allure de l'onde dans l'espace, à une date t donnée (on peut la voir comme une "photographie" de l'onde à la date t).
- La fonction $t \mapsto s(x,t)$ décrit les variations temporelles de la perturbation, pour une position x donnée (on peut voir cela comme un enregistrement de la perturbation, obtenu en plaçant un capteur fixe en x).

Célérité d'une onde progressive

On considère une onde qui se propage vers les x croissants. On représente ci-dessous son allure spatiale à deux instants t_0 et $t_0 + \Delta t$, avec $\Delta t > 0$.



Sur l'intervalle de temps Δt l'onde se propage sur une distance Δx. La vitesse de propagation est appelée *célérité* et on la suppose constante. Elle est telle que : $\boxed{c = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$.

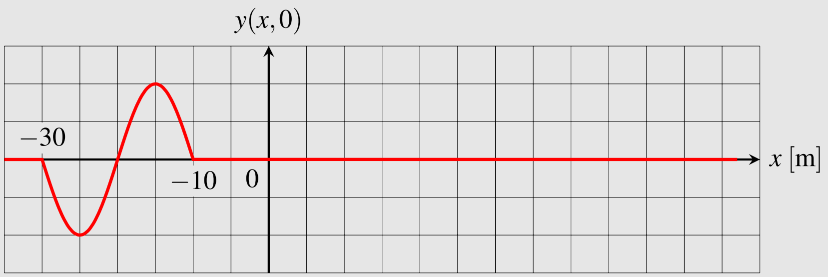
Application 1

1. La distance Terre-Soleil est environ égale à 150 millions de kilomètres et la célérité de la lumière dans le vide vaut $c = 3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Combien de temps faut-il à la lumière du Soleil pour parvenir jusqu'à la Terre ?
2. La célérité du son dans l'air est d'environ $340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. À quelle distance vous trouvez-vous d'un orage si vous entendez le tonnerre $3{,}5\,\mathrm{s}$ après avoir vu l'éclair ?
3. Un bateau transporte un sonar qui envoie des impulsions ultrasonores vers le fond marin, situé à $60\,\mathrm{m}$ de profondeur. Calculer la célérité du son dans l'eau sachant que le sonar reçoit l'écho venant du fond avec un retard de $81\,\mathrm{ms}$.

1.3 Représentations graphiques d'une onde progressive

Exemple

On considère une vague qui se propage le long d'un axe (Ox), vers les x croissants, avec une célérité $c = 2,5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On note $y(x,t)$ le déplacement vertical de la surface de l'eau en x à la date t, mesuré par rapport au niveau moyen. On représente ci-dessous l'allure spatiale $x \mapsto y(x,0)$ de la vague à la date $t = 0$.



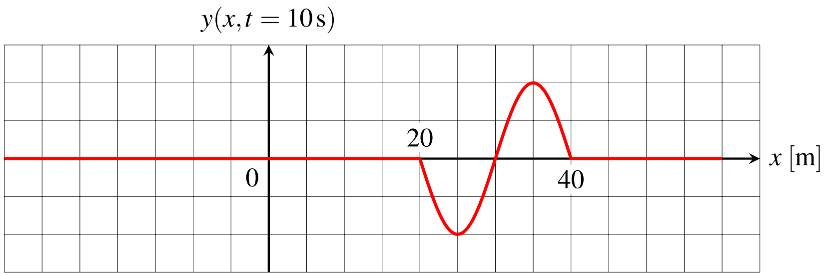
1. Représenter l'allure de la vague à la date $t = 20\,\mathrm{s}$.

2. Tracer l'allure du signal enregistré par un capteur situé en $x = 0$.

3. Tracer l'allure du signal enregistré par un capteur situé en $x = 100\,\mathrm{m}$.

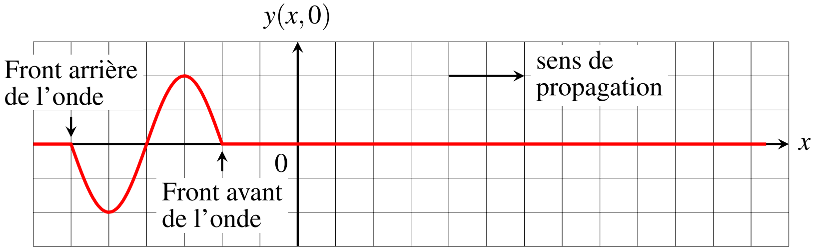
► Calculer une distance de propagation

1. Entre $t = 0$ et $t = 20\,\mathrm{s}$ la vague se propage sur une distance $d = ct = 50\,\mathrm{m}$. L'allure à la date t se déduit de celle à $t = 0$ par une simple translation de d vers les x croissants (voir figure 1).



► Passage d'une représentation spatiale à une représentation temporelle

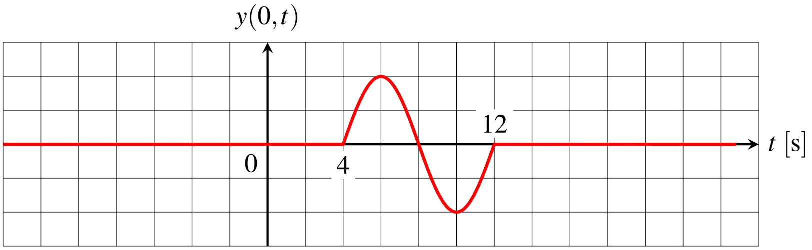
2. Par la suite on appelle "front avant de l'onde" la partie de la perturbation la plus en avant dans le sens de propagation et "front arrière de l'onde" la partie la plus en arrière, à un instant donné. On les répresente à $t = 0$ (voir page suivante).



Pour tracer l'alure $t \mapsto y(x, t = 10\,\mathrm{s})$ on se pose les trois questions suivantes :

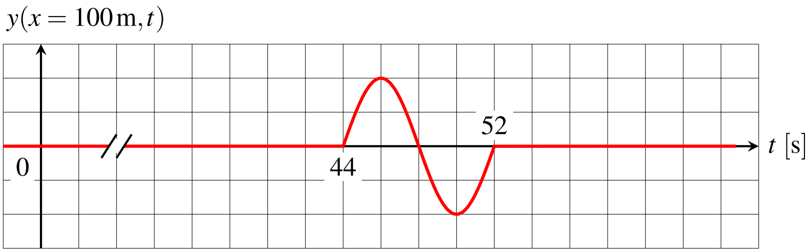
- à quelle date le front avant atteint-il le capteur en $x = 0$?
- à quelle date le front arrière atteint-il $x = 0$?
- quelle est l'allure du signal enregistré entre ces deux dates ?

À $t = 0$ le front avant est situé en $x = -10\,\mathrm{m}$. Avec une célérité $c = 2{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ il lui faut $4\,\mathrm{s}$ pour atteindre le capteur : **le front avant atteint le capteur à la date $t = 4\,\mathrm{s}$.**
À $t = 0$ le front arrière est situé en $x = -30\,\mathrm{m}$. Il lui faut $12\,\mathrm{s}$ pour atteindre le capteur : **le front arrière atteint le capteur à la date $t = 12\,\mathrm{s}$.**
La partie avant de la vague correspond à un déplacement vers le haut et la partie arrière de la vague à un déplacement vers le bas de la surface de l'eau. Le capteur va donc commencer par s'élever au dessus du niveau moyen, puis passer en dessous avant de revenir à son état de repos. On trace ci-dessous l'allure du signal enregistré.



► Calculer une durée de propagation

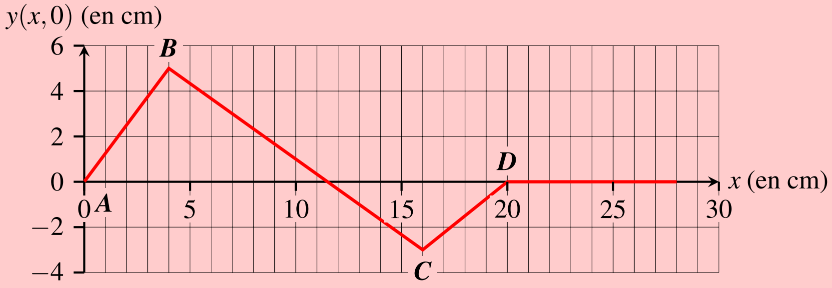
3. Pour se propager de $x_1 = 0\,\mathrm{m}$ à $x_2 = 100\,\mathrm{m}$ la vague met une durée $\tau = \frac{x_2 - x_1}{c} = 40\,\mathrm{s}$. Par conséquent le signal enregistré en $x = 100\,\mathrm{m}$ est obtenu en translatant le graphe tracé à la question précédente de $40\,\mathrm{s}$ vers le futur.



Application 2

On considère une corde qui, au repos, est horizontale et confondue avec l'axe (Ox). Un excitation extérieure provoque une vibration transversale de la corde. On note $y(x,t)$ le déplacement transversal d'un point de la corde.

Pour appréhender la propagation d'une onde mécanique le long de la corde, on réalise une simulation consistant à imposer à la corde au temps $t = 0$ la déformation décrite ci-dessous. La célérité du signal est $c = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et l'onde est progressive dans le sens des x positifs.



1. Dessiner l'aspect de la corde à la date $t_1 = 0,20\,\mathrm{s}$.

2. On place un capteur en M_1 dans la position $x_1 = 25\,\mathrm{cm}$. Tracer l'évolution temporelle de l'élongation transversale de la corde à cette position.

1.4 Expression mathématique d'une onde progressive unidimensionnelle

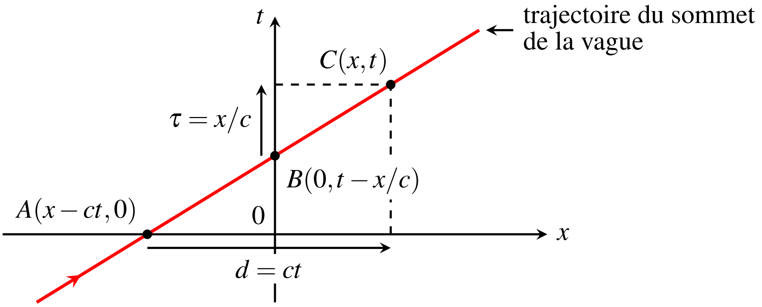
Reprenons le cas de la vague vu au paragraphe précédent. Comme elle se propage sans déformation on peut suivre son déplacement en choisissant un état vibratoire particulier (par exemple un sommet ou un creux) et en mesurant sa position $x(t)$ à tout instant. Comme la vague avance à vitesse constante c cette position suit une loi affine :

$$x(t) = \begin{cases} ct + \mathrm{Cste} & \text{si la vague se propage vers les } x \text{ croissants} \\ -ct + \mathrm{Cste} & \text{si elle se propage vers les } x \text{ décroissants} \end{cases}$$

On illustre ceci de manière graphique en représentant la trajectoire de la vague (celle de son sommet par exemple) dans un repère (x,t), en commençant par le cas d'une propagation vers les x croissants (voir en haut de la page suivante).

Tous les points situés sur cette trajectoire correspondent à un même état de la surface de l'eau (sommet de la vague), c'est-à-dire **à un même déplacement** y. On identifie en particulier trois points sur cette trajectoire :

- A indique la position du sommet de la vague à la date $t = 0$,
- B indique la date à laquelle le sommet de la vague passe par la position $x = 0$,
- C a des coordonnées (x,t) quelconques.

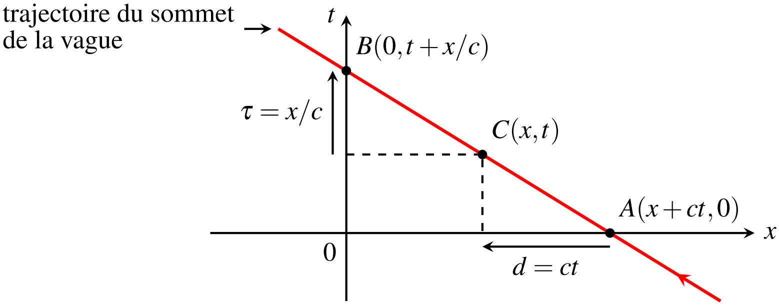


- Si le sommet de la vague est en x à la date t alors il est aussi en $x-ct$ à $t=0$ (car la vague a parcouru la distance $d=ct$ vers les x croissants entre $t=0$ et t). **Les coordonnées de A sont** $(x-ct,0)$.
- Si le sommet de la vague est en x à la date t alors il est aussi en $x=0$ à la date $t-x/c$ (car le sommet de la vague a mis une durée $\tau=x/c$ pour avancer de $x=0$ à x). **Les coordonnées de B sont** $(0,t-x/c)$.

Puisque ces trois points correspondent au même déplacement de la surface de l'eau on peut écrire $y_A=y_B=y_C$, ce qui revient à dire que :

$$\boxed{\forall(x,t)\ :\ y(x,t)=y(x-ct,0)=y(0,t-x/c)}$$

On traite de manière analogue le cas d'une onde se propageant vers les x décroissants.



- Si le sommet de la vague est en x à la date t alors il est aussi en $x+ct$ à $t=0$ (car la vague a parcouru la distance $d=ct$ vers les x décroissants entre $t=0$ et t). **Les coordonnées de A sont** $(x+ct,0)$.
- Si le sommet de la vague est en x à la date t alors il est aussi en $x=0$ à la date $t+x/c$ (car la vague a mis une durée $\tau=x/c$ pour reculer de x à $x=0$). **Les coordonnées de B sont** $(0,t-x/c)$.

Puisque ces trois points correspondent au même déplacement de la surface de l'eau on peut écrire $y_A=y_B=y_C$, ce qui revient à dire que :

$$\boxed{\forall(x,t)\ :\ y(x,t)=y(x+ct,0)=y(0,t+x/c)}$$

Expression mathématique d'une onde progressive 1D

- Une onde se propageant le long d'un axe (Ox), vers les x croissants, avec une célérité c est décrite par une fonction de la position et du temps du type $f(x-ct)$ ou, de manière équivalente, par une fonction du type $g(t-x/c)$.
- Une onde se propageant le long d'un axe (Ox), vers les x décroissants, avec une célérité c est décrite par une fonction de la position et du temps du type $f(x+ct)$ ou, de manière équivalente, par une fonction du type $g(t+x/c)$.

Application 3

Un haut-parleur placé dans l'air, supposé ponctuel et situé à l'origine d'un axe (Ox), produit une surpression acoustique $p(0,t) = p_0 \sin(\omega t)$ avec p_0 et ω deux paramètres positifs. On note c la célérité des ondes acoustiques dans l'air.

1. Déterminer l'expression de la surpression acoustique $p(x,t)$ pour tout $x > 0$ puis pour tout $x < 0$.

2. Montrer que l'onde acoustique produite par le haut-parleur est périodique dans l'espace (c'est-à-dire que $x \mapsto p(x,t)$ est périodique) et déterminer sa période λ en fonction de ω et c.

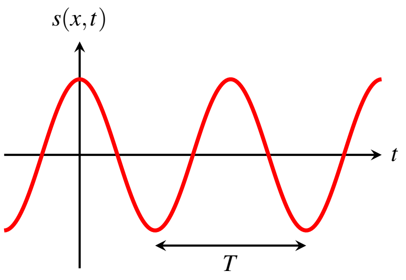
1.5 Ondes progressives sinusoïdales

1.5.1 Double périodicité

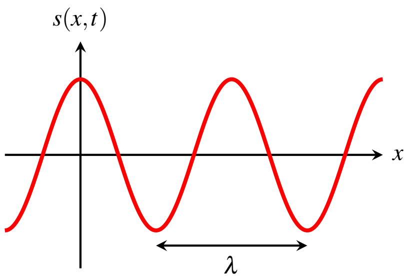
Une onde progressive sinusoïdale se propageant le long d'un axe (Ox) s'écrit sous la forme $s(x,t) = g(t \pm x/c)$ avec g une fonction sinusoïdale :

$$s(x,t) = A\cos\left[\omega(t \pm x/c) + \varphi\right]$$

avec A l'amplitude de l'onde, $\omega(t \pm x/c) + \varphi$ sa phase et φ sa phase à l'origine. Une telle onde est périodique à la fois dans le temps et dans l'espace. Sa période spatiale est appelée **longueur d'onde**, notée λ.



Vibration à t fixée



Allure spatiale à x fixée

1.5.2 Grandeurs temporelles, grandeurs spatiales

On mesure la périodicité temporelle d'une onde sinusoïdale avec plusieurs grandeurs : la période T (en s), la pulsation ω (en rad $\cdot$ s^{-1}) et la fréquence f (en Hz). Ces grandeurs sont reliées entre elles de la manière suivante :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}}$$

On mesure la périodicité spatiale d'une onde sinusoïdale avec plusieurs grandeurs : la longueur d'onde λ (en m), le **vecteur d'onde** k (en rad $\cdot$ m^{-1}) et le **nombre d'onde** σ (en m^{-1}). Ces grandeurs sont reliées entre elles de la manière suivante :

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma}}$$

On identifie des analogies entre les grandeurs temporelles et les grandeurs spatiales, que l'on résume dans le tableau ci-dessous :

	Période	Pulsation	Fréquence
Temporelle	T [s]	ω [rad $\cdot$ s^{-1}]	f [Hz]
Spatiale	λ [m]	k [rad $\cdot$ m^{-1}]	σ [m^{-1}]

Les grandeurs temporelles et spatiales sont également reliées entre elles par l'intermédiaire de la célérité c :

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f}} \iff \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

1.5.3 Vitesse de phase

En toute rigueur la vitesse de propagation d'une onde <u>sinusoïdale</u> s'appelle **vitesse de phase**.

- On dit qu'un milieu est *dispersif* si la vitesse de phase varie en fonction de la fréquence de l'onde. Dans un tel milieu une onde progressive de forme quelconque se déforme au cours de la propagation (phénomène décrit en deuxième année).
- Dans un milieu *non dispersif* la vitesse de phase est la même à toute fréquence et elle s'identifie à la célérité dont on a parlé au début de cette partie. Il n'y a pas de déformation des ondes au cours de leur propagation ; c'est le cas qui nous concerne dans ce chapitre. En résumé, <u>dans un milieu non dispersif</u> :
  - on utilise le terme "célérité" pour désigner la vitesse de propagation d'une onde de forme quelconque,
  - pour une onde sinusoïdale il est préférable de parler de "vitesse de phase", mais le terme "célérité" convient aussi.

1.5.4 Expession mathématique

Expression mathématique d'une onde progressive sinusoïdale 1D

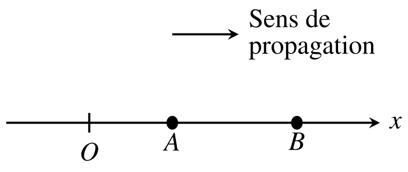
Une onde sinusoïdale se propageant le long d'un axe (Ox) est décrite par une fonction de la position et du temps du type :

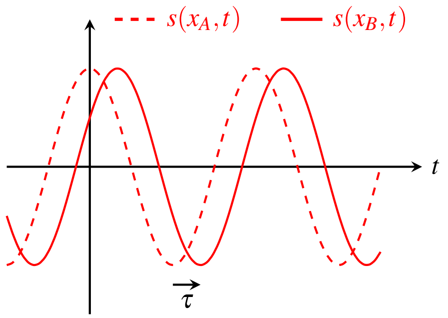
$$s(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

avec $-$ si la propagation est vers les x croissants et $+$ si elle est vers les x décroissants.

1.5.5 Déphasage entre les signaux reçus en deux points distincts

On considère une onde sinusoïdale qui se propage vers les x croissants, décrite par la perturbation : $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$. On note c la vitesse de phase. On s'intéresse aux signaux enregistrés en deux points A (position x_A) et B (position $x_B > x_A$).





L'onde passe d'abord par A puis se propage jusqu'à B. Le temps nécessaire à la propagation entre ces deux points fait que l'onde arrive en B avec un retard temporel $\tau = \frac{x_B - x_A}{c}$ par rapport à A, ce qui correspond à un retard de phase :

$$\boxed{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T} = 2\pi\frac{x_B - x_A}{\lambda}}$$

Le déphasage est proportionnel à la distance qui sépare les points A et B. Sous certaines conditions les vibrations en A et B peuvent être en phase :

$$\Delta\varphi = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff x_B - x_A = k\lambda\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Déphasage et distance entre deux points sur l'axe de propagation

Les vibrations en deux points de l'axe de propagation de l'onde sont en phase si et seulement si ces deux points sont distants **d'un nombre entier de longueurs d'onde**.

Exemple

Un haut-parleur situé en $x = 0$ génère un son pur de fréquence $f_1 = 1{,}0\,\text{kHz}$. La célérité des ondes acoustiques dans l'air vaut $c = 340\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Un microphone placé en $x = L$ enregistre l'onde acoustique reçue. On observe à l'oscilloscope le signal émis par le haut-parleur et celui enregistré par le microphone.

1. Calculer la longueur d'onde λ.

2. Exprimer le retard temporel puis le retard de phase au niveau du microphone, par rapport au haut-parleur, en fonction de L, c et f_1.

3. Le microphone est placé dans une position $x = L$ telle que son signal est en phase avec celui du haut-parleur. Si l'on augmente progressivement la fréquence du son, on observe que les deux signaux reviennent à nouveau en phase pour la première fois à la fréquence $f_2 = 1{,}2\,\text{kHz}$. Calculer L.

► **Relier fréquence et longueur d'onde**

1. La longueur d'onde vaut : $\boxed{\lambda = \dfrac{c}{f_1} = 34\,\text{cm}}$.

► **Exprimer un retard temporel, un retard de phase**

2. L'onde arrive au niveau du microphone avec un retard temporel dû à la propagation entre $x = 0$ et $x = L$: $\boxed{\tau = L/c}$. On en déduit le retard de phase :

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\tau}{T_1} \iff \boxed{\Delta\varphi = 2\pi\frac{f_1 L}{c}}$$

► **Exprimer une condition d'oscillations en phase**

3. Si les deux signaux sont en phase alors le retard de phase est un multiple entier de 2π : $\Delta\varphi = 2\pi\frac{f_1 L}{c} = 2p\pi$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Si l'on augmente la fréquence alors le retard de phase augmente aussi. On en déduit que la première fois que les deux signaux reviennent à nouveau en phase : $\Delta\varphi = 2\pi\frac{f_2 L}{c} = 2p\pi + 2\pi$.

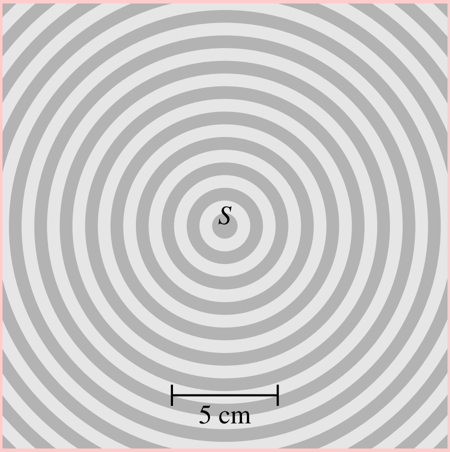
À partir des deux relations précédentes on identifie l'entier p :

$$\begin{cases} \dfrac{f_1 L}{c} = p & (1) \\ \dfrac{f_2 L}{c} = p + 1 & (2) \end{cases} \overset{(2)/(1)}{\Longrightarrow} \frac{f_2}{f_1} = 1 + \frac{1}{p} \implies p = \frac{f_1}{f_2 - f_1}$$

On conclut que : $\boxed{L = \dfrac{pc}{f_1} = \dfrac{c}{f_2 - f_1} = 1{,}7\,\text{m}}$.

Application 4

Sur une cuve à onde, on fait tomber des gouttes d'eau à intervalles de temps réguliers à la fréquence de 120 gouttes par minute. La profondeur de la cuve est constante. On obtient par stroboscopie la figure suivante. Les zones claires correspondent à des bosses au niveau de la surface de l'eau et les zones sombres à des creux.



1. Mesurer la longueur d'onde.
2. Calculer la célérité des ondes sur cette cuve.
3. On dépose deux bouchons de liège en deux points M et N tels que $SM = 3,4$cm et $SN = 7,0$cm. Les bouchons oscillent-il en phase ? en opposition de phase ? en quadrature de phase ? Justifier.
   Même question si $SM = 4,8$cm et $SN = 7,5$cm.

2 Ondes stationnaires

Nous venons de décrire des ondes se propageant dans un milieu illimité. Cependant il est fréquent qu'une onde soit confinée dans un espace restreint (une corde de guitare, le tube acoustique d'un orgue, l'intérieur d'un four à micro-ondes). Les frontières de ces milieux produisent des **réflexions**, si bien que l'onde résultante observée est une superposition de perturbations se propageant dans des directions différentes et ne peut être décrite par une simple onde progressive. Nous introduisons dans cette partie une nouvelle famille d'ondes, appelées *ondes stationnaires*, qui permet d'analyser ce genre de situations. On se limite à des cas unidimensionnels.

2.1 Définition

Onde stationnaire 1D

Une onde stationnaire 1D est obtenue par superposition de deux ondes progressives se propageant en sens contraires, telle que la vibration résultante du milieu ne transporte pas d'énergie dans l'espace. Les ondes stationnaires sont généralement observées dans des milieux confinés. En termes mathématiques elles sont caractérisées par une perturbation $s(x,t)$ dans laquelle les coordonnées de position et de temps sont découplées :

$$s(x,t) = f(x)g(t)$$

Remarque : Vous verrez en deuxième année que, réciproquement, une onde progressive peut être vue comme la superposition de deux ondes stationnaires. Ainsi les ondes progressives et stationnaires forment deux familles d'ondes qui ne s'excluent pas entre elles. Tout phénomène ondulatoire peut être traité, de manière équivalente, soit en termes d'ondes progressives soit en termes d'ondes stationnaires.

2.2 Nœuds, ventres

Onde stationnaire sinusoïdale 1D

Une onde stationnaire sinusoïdale dans la direction (Ox) est décrite mathématiquement par une vibration du type :

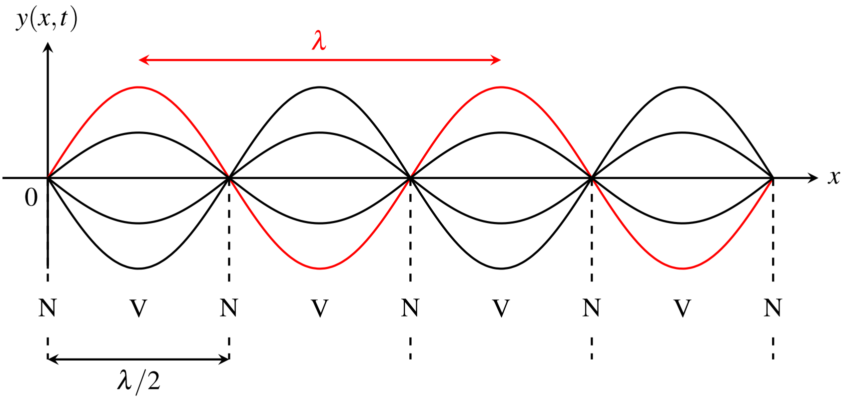
$$s(x,t) = A\sin(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi)$$

avec ψ une phase à l'origine dont la valeur est fixée par une **condition limite** (c'est-à-dire une contrainte vibratoire imposée par le milieu, généralement au niveau d'une frontière).

Imaginons par exemple une corde vibrante fixée en $x = 0$ et occupant l'espace $x > 0$. On note $y(x,t)$ la déformation transversale de la corde en x à la date t. On étudie la possibilité d'existence d'une onde stationnaire sinusoïdale sur cette corde ($A \neq 0$). La condition limite en $x = 0$ impose que la corde ne vibre jamais en ce point là, ce que l'on traduit mathématiquement sous la forme : $s(0,t) = 0\ \forall t$. On en déduit que :

$$A\sin(\omega t + \varphi)\sin\psi = 0\ \forall t \iff \sin\psi = 0 \iff \psi = 0\ [\pi]$$

Une onde stationnaire sinusoïdale peut exister sur la corde si elle est de la forme suivante : $s(x,t) = A\sin(\omega t + \varphi)\sin(kx)$. On représente ci-dessous son allure à quatre instants différents.



Tous les points de l'axe (Ox) oscillent en phase (ou en opposition de phase selon le signe de la perturbation). L'amplitude des oscillations dépend de l'endroit où l'on se trouve. En certains points elle est nulle tandis qu'en d'autres elle est maximale.

Nœud, ventre, fuseau d'une onde stationnaire sinusoïdale 1D

Un *nœud* est un lieu où la vibration est nulle à tout instant (points N sur la figure précédente).

Un *ventre* est un lieu où l'amplitude de vibration est maximale (points V).

Un *fuseau* correspond à l'intervalle qui sépare deux noeuds consécutifs. **Les fuseaux ont une largeur égale à** $\boxed{\lambda/2}$.

2.3 Modes propres de vibration

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, lorsque le milieu est semi-illimité et présente une unique condition limite, une onde stationnaire sinosoïdale peut existe. La condition limite impose une contrainte sur la phase ψ de la partie spatiale, mais pas sur la fréquence (toutes les valeurs sont permises). Il en va autrement lorsque le milieu est limité des deux côtés, c'est-à-dire lorsqu'il impose **deux conditions limites**.

Modes propres de vibration

Lorsqu'une onde 1D est confinée sur un intervalle de longueur finie, elle ne peut vibrer sinusoïdalement **que pour des fréquences discrètes**, c'est-à-dire des valeurs de fréquence précises, toutes les autres étant interdites. On dit que les fréquences de vibration sont *quantifiées*.

Toute vibration sinusoïdale permise est appelée un *mode propre de vibration* et la fréquence correspondante une *fréquence propre.*

Fondamental, harmoniques

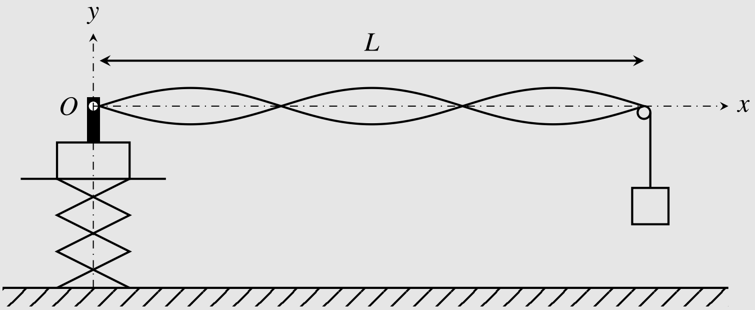
Quelque soit la largeur de l'intervalle de confinement, il existe toujours une fréquence minimale non nulle autorisée, appelée *fréquence fondamentale*.

Dans le cas le plus simple d'un milieu transparent et non dispersif, toutes les autres fréquences propres sont **des multiples entiers de la fréquence fondamentale**. Si f est la fréquence fondamentale alors le mode propre de fréquence nf avec $n > 1$ est appelé *harmonique de rang n.*

Remarque : il est à noter qu'en fonction des conditions limites certaines valeurs entières n peuvent être interdites. Les fréquences propres sont nécessairement des multiples entiers de la fréquence fondamentale mais pas nécessairement **tous** les multiples entiers.

Nous allons voir sur l'exemple classique de la *corde de Melde* comment établir le lien entre le confinement d'une onde et la quantification des fréquences propres.

Exemple



Une corde est attachée en O à un vibreur qui communique à l'une de ses extrémités un mouvement vertical sinusoïdal, de fréquence f fixée à l'aide d'un GBF. La corde au repos est maintenue en position horizontale grâce une poulie. Elle est tendue à l'aide d'une masse accrochée à son autre extrémité. On note L la longueur vibrante de la corde, c la célérité et $y(x,t)$ la déformation transversale d'un point de la corde.

En faisant varier la fréquence on constate que la corde ne vibre de manière sensible que pour certaines fréquences particulières, pour lesquelles on voit apparaître une onde stationnaire sinusoïdale. Ces vibrations correspondent aux différents modes propres de la corde.

1. On admet que dans un mode propre on peut assimiler le vibreur et la poulie à des nœuds de vibration. Déterminer l'expression de la déformation de la corde sous la forme :

$$y(x,t) = A\sin(\omega_n t)\sin(k_n x + \psi_n)$$

avec ψ_n une phase à déterminer numériquement et ω_n, k_n à exprimer en fonction de f, L, c et un entier naturel non nul n.

2. On mesure la fréquence fondamentale : $f = 6{,}5\,\text{Hz}$. Sachant que la longueur vibrante est $L = 40\,\text{cm}$, calculer c.

3. La célérité des ondes sur une corde vibrante s'écrit $c = \sqrt{T/\mu}$ avec T la force de tension que l'on exerce sur la corde et μ sa masse par unité de longueur.

On prend deux cordes identiques à la précédente et on les tresse pour en faire une corde plus épaisse. Calculer la nouvelle fréquence fondamentale.

► **Exprimer et exploiter les conditions limites**

1. Le vibreur et la poulie imposent comme conditions limites : $\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases} \quad \forall t.$

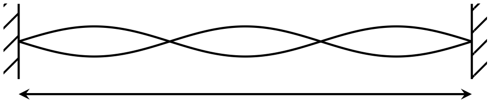
La condition limite $y(0,t) = 0\,\forall t$ implique : $\sin(\psi_n) = 0 \iff \boxed{\psi_n = 0\ [\pi]}$. La condition limite $y(L,t) = 0\,\forall t$ impose la contrainte suivante sur le vecteur d'onde :

$$\begin{aligned}\sin(k_nL) = 0 &\iff k_nL = n\pi\ ,\ n \in \mathbb{N}^\star\\ &\iff k_n = \frac{n\pi}{L}\\ &\iff \omega_n = k_nc = \frac{n\pi c}{L}\\ &\iff f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}\end{aligned}$$

Remarque : Dans le cas présent présent on écrit les fréquences propres f_n en fonction d'un entier naturel non nul (et non un modulo) car leur valeur est nécessairement positive.

Les résultats précédents nous permettent de conclure : $\boxed{y(x,t) = A\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$.

Remarque : Dans le cas où l'on cherche uniquement à déterminer les fréquences propres, sans s'intéresser à l'expression mathématique exacte de la vibration, on peut raisonner rapidement de manière graphique. Si le vibreur et la poulie sont des nœuds de vibration alors il y a nécessairement un nombre entier n de fuseaux qui les sépare. Or chaque fuseau occupe un intervalle de largeur $\lambda/2$, donc la longueur vibrante est telle que : $L = n\frac{\lambda}{2}$; les longueurs d'ondes λ_n sont quantifiées.



$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

On obtient alors les résultats précédents : $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}$ et $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$.

► **Identifier la fréquence fondamentale**

2. La fréquence fondamentale correspond à $n = 1$ (fréquence minimale permise) :

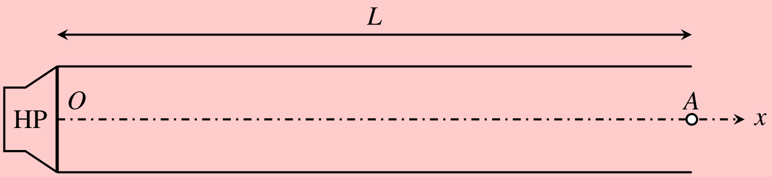
$$f = \frac{c}{2L} \iff \boxed{c = 2Lf = 5{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

3. La nouvelle corde a une masse linéique double par rapport à une corde unique : $\mu' = 2\mu$. D'après la formule proprosée la nouvelle célérité est $c' = c/\sqrt{2}$. On en déduit la nouvelle fréquence fondamentale :

$$\boxed{f' = \frac{c'}{2L} = \frac{f}{\sqrt{2}} = 4{,}6\,\mathrm{Hz}}$$

Application 5

L'air contenu dans un tuyau cylindrique de longueur $L = 2\,\mathrm{m}$, est excité par un haut-parleur (HP) émettant des ondes acoustiques sinusoïdales de fréquence f. L'extrémité du tuyau en A est ouverte. On note $p(x,t)$ la surpression acoustique dans le tuyau, x étant l'abscisse d'un point situé à l'intérieur du tuyau et t le temps. La vitesse du son dans le tuyau vaut $c = 340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.



On observe que les ondes se superposent dans le tuyau pour former une onde stationnaire. On admet les conditions limites suivantes : il y a un nœud de surpression au niveau du haut-parleur et un ventre de surpression en A au niveau de l'extrémité ouverte.

1. En introduisant un entier naturel n, donner l'expression des longueurs d'onde λ_n pour les ondes stationnaires qui peuvent exister dans le tuyau. On utilisera une méthode graphique comme présenté dans l'exemple précédent.

2. Exprimer les fréquences propres f_n. Calculer numériquement la fréquence fondamentale. Quelle est la fréquence du premier harmonique non nul ?