Devoir n°17 (non surveillé)

L'objectif du problème est d'établir l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy (P) : $\left\{\begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$ sans utiliser les résultats du cours sur les équations différentielles.

Dans tout le problème, les fonctions exponentielles et logarithmes sont supposées ne pas être connues : il est donc interdit de les utiliser.

Partie I - Unicité et propriétés

Dans cette partie, on suppose que f est une solution de (P) sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x)f(-x)$. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$.

2) En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que si g est une solution de (P) sur $\mathbb{R}$, alors $g = f$. On pourra considérer la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

4) Démontrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a + b) = f(a)f(b)$. On pourra fixer un réel a et considérer la fonction $x \mapsto \dfrac{f(a+x)}{f(a)}$.

5) En déduire que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est strictement croissante.

Partie II - Existence

Dans cette partie, on va établir l'existence d'une solution au problème de Cauchy (P).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout entier naturel $n > |x|$:

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}.$$

On va montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.

1) Justifier que, lorsque $n > |x|$, les réels $u_n(x)$ et $v_n(x)$ sont bien définis et strictement positifs.

2) Établir par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall a \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + a)^n \geqslant 1 + na.$$

3) Soit n un entier tel que $n > |x|$.

a) Montrer que $u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \times \left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$.

b) En utilisant l'inégalité de Bernoulli, montrer que $\left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant \dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}$.

c) En déduire que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante, puis que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.

4) Soit n un entier tel que $n > |x|$.

a) Montrer que $v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$.

b) En déduire que $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$.

c) En utilisant l'inégalité de Bernoulli, montrer que $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n}$.

d) Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ et conclure.

5) Pour tout réel x on note $f(x)$ la limite commune des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$. On définit ainsi une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On va montrer que f est solution de (P) sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f(0) = 1$.

b) Soient $a, k \in \mathbb{R}$.

(i) Soit un entier $n > \max(|a|, |a + k|)$. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, montrer que $\dfrac{u_n(a+k)}{u_n(a)} \geqslant 1 + \dfrac{kn}{a+n}$.

(ii) En déduire que $f(a + k) - f(a) \geqslant kf(a)$.

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in]-1, 1[, hf(x) \leqslant f(x+h) - f(x) \leqslant \dfrac{h}{1-h}f(x)$.

d) Montrer enfin que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$.