Fiche d'exercices : Arithmétique

Exercice 1 Déterminer les entiers n tels que $n-3$ divise $n+2$.

Exercice 2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 3 Déterminer le reste de la division euclidienne de 8^{2022} par 5.

Exercice 4

1) Soit n un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^n par 3.

2) En déduire qu'un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

3) En procédant de manière analogue, trouver un critère de divisibilité par 11.

Exercice 5 Calculer $1620 \wedge 960$ et $1620 \vee 960$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Quel est le pgcd de $n-1$ et de $n+1$?

2) Quel est le pgcd de n^2+1 et de $n(n-1)$?

3) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(n^a-1) \wedge (n^b-1) = n^{a \wedge b}-1$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} a \wedge b = 5 \\ a \vee b = 120 \end{array}\right. \quad ; \quad a \vee b - a \wedge b = 4 \quad ; \quad a \vee b + 11(a \wedge b) = 23.$$

Exercice 8 Un entier naturel n est dit parfait si la somme de ses diviseurs stricts (i.e. différents de n) est égale à n.

1) Trouver tous les nombres parfaits inférieurs ou égaux à 10.

2) Montrer que 28, 496, 8128 sont parfaits.

Exercice 9 *(Nombres de Mersenne)* Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $M_n = 2^n - 1$.

1) Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.

2) La réciproque est-elle vraie ? On pourra calculer M_{11}.

3) Montrer que si M_n est premier, alors $2^{n-1}M_n$ est parfait.

Exercice 10 *(Nombres de Fermat)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $F_n = 2^{2^n}+1$.

1) Montrer que si $0 < m < n$, alors F_m divise $F_n - 2$.

2) Montrer que si $m \neq n$ alors $F_m \wedge F_n = 1$.

3) En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 11 Trouver un milliard d'entiers naturels non premiers consécutifs.

Exercice 12 Soit x un entier naturel dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ (les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts, les a_i sont des entiers naturels non nuls). Déterminer le nombre de diviseurs de x.

Exercice 13 - Nombres croisés

	1	**2**	**3**
1			
2			
3			

Horizontalement :
1. Un nombre à huit diviseurs.
2. Un nombre premier.
3. Une puissance quatrième.

Verticalement :
1. Un multiple de 17.
2. Un carré, mais pas une puissance quatrième.
3. Un palindrome.