TP n° 12 : Modélisation d'une bobine réelle - corrigé

1) On applique la loi du pont diviseur de tension dans l'espace complexe puis on passe au module :

$$\underline{S} = \frac{R}{\underline{Z}}\underline{E} \Longrightarrow \boxed{|\underline{S}| = \frac{R}{Z}E}$$

2) La tension $s(t)$ entre en résonance à condition que l'amplitude réelle $\omega \mapsto S_m(\omega) = |\underline{S}|(\omega)$ soit maximale. D'après l'expression de la question précédente il faut donc que le module de l'impédance totale $\omega \mapsto Z(\omega)$ soit minimale.

Pour déterminer l'impédance totale on commence par associer les impédances $\underline{Z}_L$ et $\underline{Z}_{C_p}$ en dérivation :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_{C_p} = \frac{1}{jL\omega} + jC_p\omega = \frac{1 - LC_p\omega^2}{jL\omega} \Longrightarrow \underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{jL\omega}{1 - LC_p\omega^2}$$

On associe ensuite les différentes impédances en série pour obtenir l'impédance totale du circuit :

$$\underline{Z} = r_s + r(f) + \frac{jL\omega}{1 - LC_p\omega^2} + \frac{1}{jC\omega} + R = r_s + r(f) + R + j\left(\frac{L\omega}{1 - LC_p\omega^2} - \frac{1}{C\omega}\right)$$

On calcule le module de cette impédance :

$$Z = \sqrt{\left(r_s + r(f) + R\right)^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC_p\omega^2} - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Seule la partie imaginaire dépend de la pulsation ω. On en déduit que ce module est minimal à condition que la partie imaginaire de $\underline{Z}$ soit nulle :

$$\frac{L\omega}{1 - LC_p\omega^2} - \frac{1}{C\omega} = 0 \Longleftrightarrow 1 - LC_p\omega^2 = LC\omega^2 \Longleftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_p)}} \Longleftrightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_p)}}}$$

3) À la résonance la partie imaginaire de $\underline{Z}$ est nulle donc l'impédance totale du circuit est réelle positive : $\underline{Z} = r_s + r(f) + R$. Or, le déphasage entre $u(t)$ et $s(t)$ vaut :

$$\Delta\varphi_{s/u} = \arg(\underline{S}) - \arg(\underline{U}) = \arg\left(\frac{\underline{S}}{\underline{U}}\right)$$

On applique la loi du pont diviseur de tension pour relier $\underline{U}$ et $\underline{S}$ à la résonance :

$$\underline{S} = \frac{R}{\underline{Z} - r_s}\underline{U} = \frac{R}{r(f) + R}\underline{U}$$

On en déduit que :

$$\Delta\varphi_{s/u} = \arg\underbrace{\left(\frac{R}{r(f) + R}\right)}_{\in\mathbb{R}^+} = 0$$

Les tensions $u(t)$ et $s(t)$ sont en phase à la résonance.

4) On propose le protocole suivant :

- on choisit une valeur pour la capacité C de la boîte à décade ;
- on observe les tensions $u(t)$ et $s(t)$ sur les deux voies d'entrée d'un oscilloscope ;
- on modifie la fréquence f du GBF jusqu'à ce que les tensions $u(t)$ et $s(t)$ soient en phase. On lit alors la valeur de la fréquence de résonance f_r sur le GBF ;
- on affiche à l'oscilloscope la valeur efficace des tension $u(t)$ et $s(t)$. On détermine le gain du montage par la relation :

$$G(f_r) = \frac{|\underline{S}|}{|\underline{U}|} = \frac{S_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}}$$

Remarque : par définition $G = \frac{S_m}{U_m}$ est le rapport des amplitudes réelles. Toutefois on a vu que pour un signal sinusoïdal : $S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$ et $U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$. Le rapport des amplitudes réelles est donc égal au rapport des valeurs efficaces : $G = \frac{S_m}{U_m} = \frac{S_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}}$.

D'après le calcul de la question précédente :

$$G(f_r) = \left|\frac{\underline{S}}{\underline{U}}\right| = \frac{R}{r(f_r) + R} \Longleftrightarrow r(f_r) + R = \frac{R}{G(f_r)} \Longleftrightarrow \boxed{r(f_r) = R\left(\frac{1}{G(f_r)} - 1\right)}$$

5) Ce protocole permet de mesurer la résistance interne de la bobine **uniquement à la fréquence de résonance du circuit**. Or, on souhaite étudier les variations de cette résistance avec la fréquence. Pour cela **il faut donc que l'on soit capable de modifier la fréquence de résonance du circuit, ce que l'on fait en modifiant la valeur de la capacité variable** C. En effet d'après le résultat de la question 2 la fréquence de résonance dépend de C.