Chapitre 12

POLYNÔMES

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Polynômes à une indéterminée

1 Ensemble $K[X]$

Définition 1 *Un* **polynôme à une indéterminée à coefficients dans** K *est une suite d'éléments de* K *nulle à partir d'un certain rang.*

Si $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ est une telle suite, on la notera :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i=0}^{n} a_iX^i.$$

Remarque : Pour l'instant ceci n'est qu'une notation. On ne considère pas ici les polynômes comme des fonctions mais comme des suites de coefficients.

On dit que X est une **indéterminée**. *Ce n'est pas une variable.*

L'ensemble des polynômes à coefficients dans K est noté $K[X]$.

Égalité de deux polynômes :

Soient $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_iX^i$. Alors :

$$P = Q \Leftrightarrow \forall\, i \in \{0, \ldots, n\},\ a_i = b_i.$$

Autrement dit, deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

2 Opérations dans $K[X]$

• Addition

Soient $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_iX^i$. Alors on pose $P + Q = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)X^i$.

Cette addition correspond à celle de $K^{\mathbb{N}}$. Elle est commutative, associative, elle admet un élément neutre (le polynôme nul), et tout $P \in K[X]$ admet un opposé $-P = \sum_{i=0}^{n} (-a_i)X^i$.

• Multiplication par un scalaire

Soient $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et $\alpha \in K$. Alors on pose $\alpha P = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i)X^i$.

Pour tous $P, Q \in K[X]$ et pour tous $\alpha, \beta \in K$ on a alors :

(*i*) $1.P = P$,

(*ii*) $\alpha(\beta P) = (\alpha\beta)P$,

(*iii*) $\alpha(P + Q) = \alpha P + \alpha Q$,

(*iv*) $(\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P$.

On dira dans le chapitre suivant que $(K[X], +, .)$ est un K**-espace vectoriel**.

• MULTIPLICATION

Soient $P=\sum_{i=0}^{m} a_iX^i$ et $Q=\sum_{j=0}^{n} b_jX^j$. Alors on pose $P\times Q=\sum_{k=0}^{m+n} c_kX^k$ où, pour tout $k\in\{0,\dots,m+n\}$:

$$c_k=\sum_{i+j=k} a_ib_j=\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}.$$

Pour se convaincre du bien-fondé de cette définition on pourra faire le calcul pour $P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$ et $Q=b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3$.

On peut montrer que la multiplication ainsi définie est commutative, associative, qu'elle admet un élément neutre (le polynôme unité 1) et qu'elle est distributive par rapport à l'addition. Elle est également intègre :

$$\forall\, P,Q\in K[X],\ \big(P\times Q=0\Rightarrow (P=0 \text{ ou } Q=0)\big).$$

• COMPOSITION

Soient $P,Q\in K[X]$ avec $P=\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$. La **composée de** P **et de** Q est le polynôme noté $P\circ Q$ ou $P(Q)$ défini par :

$$P\circ Q=\sum_{i=0}^{n} a_iQ^i.$$

Par exemple, si $P=X^2+X+1$ et $Q=X+1$, alors $P\circ Q=P(X+1)=(X+1)^2+(X+1)+1=X^2+3X+3$.

Remarques :

1) Pour éviter la confusion entre produit et composée, on notera par exemple $(X+1)P$ et non $P(X+1)$ le produit des polynômes P et $X+1$.

2) Si $Q=X$, alors $P\circ Q=P$: P et $P(X)$ désignent le même polynôme.

3 Degré d'un polynôme

• DÉFINITION

Définition 2 *Soit* $P=\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ *un polynôme non nul. Le* **degré de** P *est le plus grand entier* i *tel que* $a_i\neq 0$. *On le note* $\deg P$.

Par convention on pose $\deg 0=-\infty$ (pour que la proposition ci-dessous soit valable si $P=0$ ou $Q=0$).

Si P est de degré p, le coefficient a_p (qui est donc non nul) est appelé **coefficient dominant de** P. Par exemple $3X^2-2X+5$ est de degré 2 et son coefficient dominant est 3.

Définition 3 *On dit qu'un polynôme* P *est* **unitaire** *si son coefficient dominant est 1.*

Par exemple X^3-2X^2+5X+7 est unitaire.

• PROPRIÉTÉS

Proposition 1 *Soient* P *et* Q *deux polynômes. Alors :*

(i) $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg P,\deg Q)$.

(ii) $\deg(P\times Q)=\deg P+\deg Q$.

Démonstration :

Si $P=0$ ou $Q=0$, c'est immédiat. Supposons P et Q non nuls.

Soient $P=a_0+a_1X+\ldots+a_mX^m$ avec $a_m\neq 0$ et $Q=b_0+b_1X+\ldots+b_nX^n$ avec $b_n\neq 0$ (donc $\deg P=m$ et $\deg Q=n$).

(i) Si $m<n$, alors le coefficient dominant de $P+Q$ est b_n, donc $\deg(P+Q)=n=\max(\deg P,\deg Q)$. De même, si $m>n$, alors le coefficient dominant de $P+Q$ est a_m, donc $\deg(P+Q)=m=\max(\deg P,\deg Q)$.

Si $m=n$ et que $a_m+b_n\neq 0$, alors le coefficient dominant de $P+Q$ est a_m+b_n, donc $\deg(P+Q)=m=n=\max(\deg P,\deg Q)$. Si $m=n$ et que $a_m+b_n=0$, alors $\deg(P+Q)<m$ donc $\deg(P+Q)<\max(\deg P,\deg Q)$.

Dans tous les cas on a $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg P,\deg Q)$.

(ii) Le terme de plus haut degré de $P\times Q$ est $a_mb_nX^{m+n}$ donc $\deg(P\times Q)=m+n=\deg P+\deg Q$. $\square$

• ENSEMBLE $K_n[X]$

On note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n :

$$K_n[X] = \{P \in K[X] \,/\, \deg P \leqslant n\}.$$

Ainsi $K_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants, $K_1[X]$ est l'ensemble des polynômes de la forme $aX + b$, $K_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de la forme $aX^2 + bX + c$, etc.

Proposition 2 $K_n[X]$ *est stable par addition et par multiplication par un scalaire.*

Cela signifie que si $P, Q \in K_n[X]$ et que $\alpha \in K$, alors $P + Q \in K_n[X]$ et $\alpha P \in K_n[X]$. On dira au chapitre suivant que $K_n[X]$ est un **sous-espace vectoriel** de $K[X]$.

Démonstration : Conséquence immédiate de la proposition 1. □

4 Fonction polynomiale associée à un polynôme

Soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in K[X]$. Soit $x \in K$. La **valeur numérique de** P **en** x est le scalaire :

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n.$$

$P(x)$ est donc un élément de K. Par exemple, si $P = X^2 - 4X + 2$, alors $P(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 2 = -1$.

Définition 4 *Soit* $P \in K[X]$. *La* **fonction polynomiale associée à** P *est l'application de* K *dans* K *qui à tout* x *de* K *associe* $P(x)$.

On la note en général $\tilde{P}$. Par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$, si $P = X^2 - 4X + 2$, alors $\tilde{P}$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\tilde{P}(x) = x^2 - 4x + 2$.

Remarque : Souvent $\tilde{P}$ est simplement notée P. Il ne faut cependant pas confondre un polynôme (qui est en fait une suite de coefficients) et sa fonction polynomiale associée. Ce sont des objets mathématiques différents.

5 Divisibilité dans $K[X]$

Définition 5 *Soient* A *et* B *deux polynômes de* $K[X]$. *On dit que* B **divise** A, *ou que* B *est un* **diviseur de** A, *ou encore que* A *est un* **multiple de** B *s'il existe un polynôme* $Q \in K[X]$ *tel que* $A = B \times Q$. *On note alors* $B|A$.

Exemple : $X - 1$ divise $X^2 - 3X + 2$ car $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$.

Théorème 3 *Soient* A *et* B *deux polynômes de* $K[X]$ *(avec* B *non nul). Il existe un unique couple* (Q, R) *de polynômes de* $K[X]$ *tel que :*

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}.$$

On dit que Q est le **quotient** et R le **reste** dans la **division euclidienne de** A **par** B.

Démonstration :

− Existence : Fixons $B \in K[X]$ non nul. On va raisonner par récurrence forte sur le degré de A.

Si $\deg A < \deg B$ alors on peut écrire $A = B \times 0 + A$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant \deg B$. Supposons le résultat vrai pour les polynômes A tels que $\deg A \leqslant n$.

Soit A un polynôme de degré $n+1$: $A = a_{n+1}X^{n+1} + a_nX^n + \ldots + a_0$ avec $a_{n+1} \neq 0$. Posons $p = \deg B$ et $B = b_pX^p + b_{p-1}X^{p-1} + \ldots + b_0$ avec $b_p \neq 0$. On a donc $n + 1 \geqslant p$.

Pour obtenir $a_{n+1}X^{n+1}$, multiplions B par $\frac{a_{n+1}}{b_p}X^{n-p+1}$: on a $\frac{a_{n+1}}{b_p}X^{n+1}B = a_{n+1}X^{n+1} + \frac{a_{n+1}b_{p-1}}{b_p}X^n + \ldots + \frac{a_{n+1}b_0}{b_p}X^{n-p+1}$.

Ainsi, $C = A - \frac{a_{n+1}}{b_p}X^{n-p+1}B$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par hypothèse de récurrence, il existe donc deux polynômes Q' et R tels que $C = BQ' + R$ avec $\deg R < \deg B$.

Alors $A = C + \frac{a_{n+1}}{b_p}X^{n-p+1}B = B\left(Q' + \frac{a_{n+1}}{b_p}X^{n-p+1}\right) + R = BQ + R$ où $Q = Q' + \frac{a_{n+1}}{b_p}X^{n-p+1}$. C'est ce que l'on voulait.

Le théorème de récurrence permet de conclure.

− Unicité : Supposons que l'on ait à la fois $A = BQ_1 + R_1$ et $A = BQ_2 + R_2$ avec $\deg R_1 < \deg B$ et $\deg R_2 < \deg B$.

Alors $BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ donc $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Mais si $Q_1 - Q_2$ est non nul, alors $\deg B(Q_1 - Q_2) \geqslant \deg B$: c'est impossible puisque $\deg(R_2 - R_1) < \deg B$. Par conséquent, $Q_1 - Q_2 = 0$, donc $Q_1 = Q_2$ et par suite $R_1 = R_2$. □

Exercice 1 Effectuer la division euclidienne de $A = 3X^4 - 6X^3 + 2X + 1$ par $B = X^2 - X + 2$.

II Racines d'un polynôme

1 Racines d'un polynôme

Définition 6 *Soit $P \in K[X]$ et $a \in K$. On dit que a est une* **racine de** P *(ou un* **zéro de** P*) si $P(a) = 0$.*

Une équation de la forme $P(x) = 0$, où P est un polynôme, est une **équation algébrique** ou **équation polynomiale**.

Proposition 4 *a est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P.*

Autrement dit, a est une racine de P si et seulement si on peut écrire $P = (X - a)Q$ où $Q \in K[X]$.

Démonstration :

($\Leftarrow$) Si $P = (X - a)Q$ alors $P(a) = 0$.

($\Rightarrow$) Supposons que a est une racine de P. Effectuons la division euclidienne de P par $X - a$: il existe $Q, R \in K[X]$ tels que $P = (X - a)Q + R$, avec $\deg R < \deg(X - a)$. R est donc un polynôme constant : $R = c \in K$. Or $P(a) = 0$, donc $c = 0$ et $P = (X - a)Q$. $\square$

On peut généraliser ce résultat :

Proposition 5 *Soit $P \in K[X]$ et soient $a_1, \ldots, a_n \in K$ deux à deux distincts. Alors $a_1, \ldots, a_n$ sont racines de P si et seulement si $(X - a_1) \ldots (X - a_n)$ divise P.*

Démonstration :

Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est la proposition précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la proposition vraie au rang n et démontrons-la au rang $n + 1$. Soient donc $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ des scalaires deux à deux distincts. Supposons que $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sont racines de P. Par hypothèse de récurrence, il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X - a_1) \ldots (X - a_n)Q$. On a donc $0 = P(a_{n+1}) = (a_{n+1} - a_1) \ldots (a_{n+1} - a_n)Q(a_{n+1})$, et donc $Q(a_{n+1}) = 0$: a_{n+1} est racine de Q. Il existe donc $R \in K[X]$ tel que $Q = (X - a_{n+1})R$, et par suite $P = (X - a_1) \ldots (X - a_n)(X - a_{n+1})R$, ce qui achève la récurrence. $\square$

Corollaire 6 *Si un polynôme de degré inférieur ou égal à n admet au moins $n + 1$ racines distinctes, alors il est nul.*

Par conséquent, un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.

Démonstration :

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Supposons que $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ (deux à deux distincts) sont racines de P. Alors il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X - a_1) \ldots (X - a_n)(X - a_{n+1})Q$. Mais alors $\deg P = n + 1 + \deg Q$: c'est impossible, sauf si $P = Q = 0$. $\square$

Corollaire 7 *Soient P et Q deux polynômes de degré inférieur ou égal à n. Si $P(x) = Q(x)$ pour au moins $n + 1$ valeurs distinctes de x, alors $P = Q$.*

Démonstration : $P - Q$ a $n + 1$ racines distinctes, donc $P - Q = 0$, d'où $P = Q$. $\square$

Corollaire 8 *Soient P et Q deux polynômes de $K[X]$. Soient $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ leurs fonctions polynomiales associées. Alors $P = Q$ si et seulement si $\tilde{P} = \tilde{Q}$.*

Démonstration :

Le sens direct est immédiat. Pour le sens réciproque : $\tilde{P} = \tilde{Q}$ signifie que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in K$. Puisque K est infini ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), le corollaire précédent permet de conclure. $\square$

Remarque : L'égalité $P = Q$ est une égalité entre polynômes : cela signifie que P et Q ont les mêmes coefficients. L'égalité $\tilde{P} = \tilde{Q}$ est une égalité entre fonctions : cela signifie que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in K$. Le corollaire 8 dit que ces deux égalités sont équivalentes.

2 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 7 *Soient $P \in K[X]$ et $a \in K$. On dit que a est une* **racine d'ordre k de** P *si P est divisible par $(X - a)^k$ mais pas par $(X - a)^{k+1}$.*

Exemple : Soit $P = 3X^7(X - 1)^2(X + 3)^4$. Alors 0 est racine d'ordre 7 de P, 1 est racine d'ordre 2 et -3 est racine d'ordre 4.

Proposition 9 *a est une racine de P d'ordre k si et seulement s'il existe $Q \in K[X]$ tel que* $\left\{ \begin{array}{l} P = (X - a)^k Q \\ Q(a) \neq 0 \end{array} \right.$.

Démonstration :
($\Rightarrow$) Supposons que a est une racine de P d'ordre k. Alors $(X-a)^k$ divise P donc il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X-a)^k Q$. Si $Q(a) = 0$, alors $(X-a)$ divise Q, donc $(X-a)^{k+1}$ divise P, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Par conséquent $Q(a) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que $P = (X-a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Si $(X-a)^{k+1}$ divise P, on peut écrire $P = (X-a)^{k+1} R$ avec $R \in K[X]$. On a alors $(X-a)^k Q = (X-a)^{k+1} R$, donc $Q = (X-a)R$. Mais alors $Q(a) = 0$, ce qui est contradictoire. Conclusion : $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P. $\square$

On peut généraliser ce résultat :

Proposition 10 *Soit $P \in K[X]$ et soient $a_1, \ldots, a_n \in K$ deux à deux distincts. Alors $a_1, \ldots, a_n$ sont racines de P d'ordres respectifs $k_1, \ldots, k_n$ si et seulement s'il existe $Q \in K[X]$ tel que* $\begin{cases} P = (X-a_1)^{k_1} \ldots (X-a_n)^{k_n} Q \\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ Q(a_i) \neq 0 \end{cases}$.

Démonstration : Par récurrence. $\square$

Corollaire 11 *Si un polynôme de degré inférieur ou égal à n admet au moins $n+1$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité, alors il est nul.*

III Polynôme dérivé

1 Définition

Définition 8 *Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$. Le* **polynôme dérivé de** *P est :*

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \ldots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

On constate que si P est constant alors $P' = 0$, et sinon $\deg P' = \deg P - 1$. On voit aussi que, dans le cas réel, la fonction polynomiale associée à P' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à P.

Proposition 12 *Pour tous $P, Q \in K[X]$ et pour tout $\alpha \in K$:*

(i) $(P+Q)' = P' + Q'$,

(ii) $(\alpha P)' = \alpha P'$,

(iii) $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$.

Démonstration :
(i) et (ii) sont immédiats. Pour le (iii) on reprend les notations du haut de la page 2.

On a, d'une part, $(PQ)' = \sum_{k=0}^{m+n-1} (k+1) c_{k+1} X^k$ avec $c_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i}$.

D'autre part, $P'Q = \sum_{k=0}^{m+n-1} d_k X^k$ avec $d_k = \sum_{i=0}^{k} (i+1) a_{i+1} b_{k-i} = \sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k+1-i}$ et $PQ' = \sum_{k=0}^{m+n-1} e_k X^k$ avec $e_k = \sum_{i=0}^{k} a_i (k+1-i) b_{k+1-i}$.

Ainsi $P'Q + PQ' = \sum_{k=0}^{m+n-1} (d_k + e_k) X^k$ avec $d_k + e_k = \sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} + \sum_{i=0}^{k} a_i (k+1-i) b_{k+1-i} = (k+1) a_{k+1} b_0 + \sum_{i=1}^{k} (k+1) a_i b_{k+1-i} + (k+1) a_0 b_{k+1} = (k+1) \sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i} = (k+1) c_{k+1}$. $\square$

Par récurrence on peut définir les dérivées successives de P :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ P^{(n+1)} = (P^{(n)})' \end{cases}.$$

Proposition 13 *Pour tous $P, Q \in K[X]$, pour tout $\alpha \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

(i) $(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$,

(ii) $(\alpha P)^{(n)} = \alpha P^{(n)}$,

(iii) $(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$ (formule de Leibniz).

Démonstration : Par récurrence. $\square$

2 Formule de Taylor

Théorème 14 *Soit P un polynôme de $K[X]$ de degré n et soit $a \in K$. Alors :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Démonstration :

Par linéarité de la dérivation (proposition 13 (i) et (ii)), il suffit de démontrer la formule pour $P = X^n$.

On a, d'une part : $X^n = ((X-a)+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(X-a)^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!a^{n-k}}{k!(n-k)!}(X-a)^k$.

D'autre part, on montre facilement par récurrence que $P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$ et donc que $P^{(k)}(a) = \frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}$ pour tout $k \leqslant n$. Le résultat s'ensuit. □

Remarques :

1) Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors en écrivant la formule de Taylor en 0 on obtient $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ (il suffit d'identifier les coefficients).

2) La formule peut également s'écrire $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k$.

3 Caractérisation des racines multiples

Théorème 15 *Soient $P \in K[X]$ et $a \in K$. Alors a est une racine d'ordre k de P si et seulement si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0 \\ P^{(k)}(a) \neq 0 \end{array} \right. .$$

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que a est une racine d'ordre k de P. Alors $P = (X-a)^k Q$ où Q est un polynôme tel que $Q(a) \neq 0$. Par la formule de Leibniz on a, pour tout $j \in \{0, \ldots, k\}$:

$$P^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left((X-a)^k\right)^{(i)} Q^{(j-i)}.$$

Par récurrence on montre facilement que $\left((X-a)^k\right)^{(i)} = \frac{k!}{(k-i)!}(X-a)^{k-i}$ si $i \leqslant k$, donc :

$$P^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{k!}{(k-i)!}(X-a)^{k-i} Q^{(j-i)}.$$

Ainsi $P^{(j)}(a) = 0$ si $j < k$ car tous les $(X-a)^{k-i}$ s'annulent en a. En revanche, $P^{(k)}(a) = k!Q(a) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Soit $n = \deg P$. La formule de Taylor donne $P = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$, donc en posant $Q = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^{n-k}$ on a $P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$. □

Exercice 2 Soit $P = X^4 - 7X^3 + 15X^2 - 13X + 4$. Déterminer les racines de P avec leurs ordres de multiplicité et factoriser P.

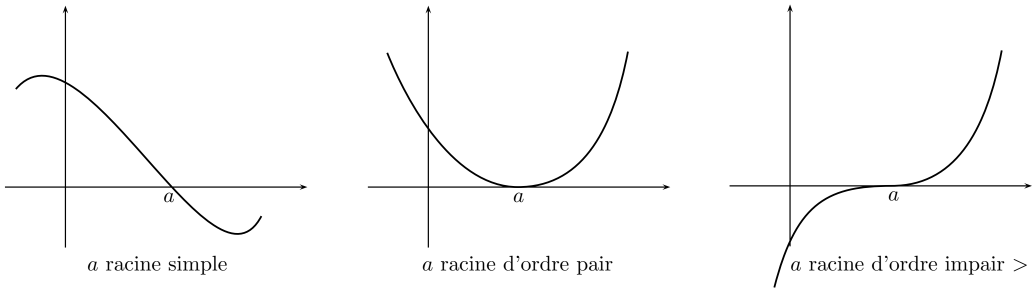
On peut donner une interprétation graphique du théorème dans le cas réel de la manière suivante. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On note encore P la fonction polynomiale associée à P, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. La formule de Taylor-Young à l'ordre n en a s'écrit :

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \tfrac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \tfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Si a est racine simple de P, alors $\left\{ \begin{array}{l} P(a) = 0 \\ P'(a) \neq 0 \end{array} \right.$, donc $P(x) = P'(a)(x-a) + o(x-a)$ au voisinage de a : $\mathcal{C}$ traverse l'axe des abscisses au point d'abscisse a et sa tangente en ce point n'est pas horizontale.

Si a est racine de P d'ordre $2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), alors $\left\{ \begin{array}{l} P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(2k-1)}(a) = 0 \\ P^{(2k)}(a) \neq 0 \end{array} \right.$, donc au voisinage de a $P(x) = \frac{P^{(2k)}(a)}{(2k)!}(x-a)^{2k} + o((x-a)^{2k})$: $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(a, 0)$ mais la tangente est horizontale et $\mathcal{C}$ reste du même côté de l'axe des abscisses au voisinage de ce point.

Si a est racine de P d'ordre $2k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), alors $\begin{cases} P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(2k)}(a) = 0 \\ P^{(2k+1)}(a) \neq 0 \end{cases}$, donc au voisinage de a $P(x) = \frac{P^{(2k+1)}(a)}{(2k+1)!}(x-a)^{2k+1} + o((x-a)^{2k+1})$: $\mathcal{C}$ traverse l'axe des abscisses au point de coordonnées $(a, 0)$, et la tangente en ce point est horizontale.



a racine simple — a racine d'ordre pair — a racine d'ordre impair > 1

IV Décomposition en produit de polynômes irréductibles

1 Polynômes scindés

Définition 9 *$P \in K[X]$ est* **scindé** *si on peut le décomposer en produit de polynômes de degré 1.*

Autrement dit, P est scindé s'il existe $\lambda \in K^*$, $a_1, \ldots, a_p \in K$ deux à deux distincts et $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{k_i} = \lambda (X - a_1)^{k_1} (X - a_2)^{k_2} \ldots (X - a_p)^{k_p}.$$

Cela revient à dire que le degré de P est égal à la somme des ordres de multiplicité de ses racines.

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $X^2 + 1$ n'est pas scindé car il n'a pas de racines. En revanche, dans $\mathbb{C}[X]$, il est scindé car $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

2 Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

Soit $P \in K[X]$ un polynôme scindé. On cherche à déterminer une relation entre les coefficients de P et la somme et le produit de ses racines.

Commençons par étudier le cas des polynômes de degré 2. Soit donc $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme scindé, et soient x_1 et x_2 ses racines. On a alors $P = a(X - x_1)(X - x_2)$.
En développant on obtient $P = a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2)$, donc par identification on a $\begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ a x_1 x_2 = c \end{cases}$, d'où :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Étudions maintenant le cas des polynômes de degré 3. Soit donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme scindé, et soient x_1, x_2 et x_3 ses racines. On a alors $P = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$.

En développant on obtient $P = a(X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)X - x_1 x_2 x_3)$, donc par identification on a $\begin{cases} -a(x_1 + x_2 + x_3) = b \\ -a x_1 x_2 x_3 = d \end{cases}$, d'où :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}.$$

Cas général :

Proposition 16 *Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ un polynôme scindé de $K[X]$. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses racines, comptées avec leurs ordres de multiplicité. Alors :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}.$$

Démonstration :

On a $P = a_n(X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_n)$: il suffit de développer et d'identifier les termes en X^{n-1} et les termes constants. □

3 Polynômes irréductibles

Définition 10 *Soient A et B deux polynômes de $K[X]$ non nuls. On dit que A et B sont* **associés** *s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $A = \lambda B$.*

A et B sont associés si et seulement si A divise B et que B divise A.

Définition 11 *$P \in K[X]$ est* **irréductible** *s'il n'est pas constant et qu'il n'est divisible que par les constantes et par ses polynômes associés.*

Par conséquent un polynôme n'est pas irréductible si et seulement si on peut l'écrire comme produit de deux polynômes non constants. On notera l'analogie avec la notion de nombre premier dans $\mathbb{N}$.

Exemples :

− Les polynômes de degré 1 sont irréductibles. En effet, si $aX + b = Q \times R$, alors Q ou R est constant.

− Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ car $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

− Le polynôme $X^4 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (et donc dans $\mathbb{C}[X]$ non plus) : on peut écrire $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$.

Théorème 17 *Tout polynôme $P \in K[X]$ non constant se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de polynômes irréductibles :*

$$P = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r},$$

où $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts, $\lambda \in K^*$ et $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration :

On admettra que la décomposition est unique. Pour l'existence, on raisonne par récurrence forte sur $n = \deg P$.

Un polynôme de degré 1 $P = aX + b$ peut s'écrire $a\left(X + \frac{b}{a}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le théorème vrai pour les polynômes de degré inférieur à n, et démontrons-le pour les polynômes de degré $n + 1$.

Soit donc P un polynôme de degré $n + 1$. S'il est irréductible, il suffit de mettre en facteur son coefficient dominant. Sinon, il existe deux polynômes Q et R non constants et non associés à P tels que $P = QR$. Mais alors Q et R sont de degré inférieur ou égal à n, donc par hypothèse de récurrence on peut les décomposer en produit de polynômes irréductibles, et par conséquent P aussi.

Le théorème de récurrence permet de conclure. □

4 Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

On admet le résultat suivant, qu'on appelle **théorème de d'Alembert-Gauss** ou **théorème fondamental de l'algèbre** :

Théorème 18 *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a au moins une racine.*

Remarque : Dans $\mathbb{R}[X]$ c'est faux : par exemple, $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle.

Corollaire 19 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

Démonstration :

On a vu que les polynômes de degré 1 sont irréductibles. On va montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

Soit donc P un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X]$. Supposons que $\deg P > 1$. D'après le théorème de d'Alembert, P a une racine a. On peut donc factoriser P par $X - a$: il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$. Mais alors $\deg Q = \deg P - 1 > 0$ donc Q n'est pas constant, et donc P n'est pas irréductible : contradiction. Conclusion : P est forcément de degré 1. □

On déduit ainsi du théorème 17 que :

Théorème 20 *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.*

Autrement dit, tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{k_i},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ (deux à deux distincts) et $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 21 *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ a exactement n racines (comptées avec leurs ordres de multiplicité).*

5 Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 22 *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors α est racine de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine de P.*

Démonstration :
Soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$. Alors :

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n = 0 \Leftrightarrow \overline{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n} = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1\overline{\alpha} + \ldots + a_n\overline{\alpha}^n = 0 \Leftrightarrow P(\overline{\alpha}) = 0. \square$$

Corollaire 23 *Les racines complexes d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sont soit réelles, soit conjuguées deux à deux.*

Théorème 24 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.*

Démonstration :
On a vu que les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2 et de discriminant $\Delta < 0$. Il n'a donc pas de racines réelles. Si P n'est pas irréductible, alors on peut le décomposer en produit de deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1, et il a donc une ou deux racines réelles, ce qui est contradictoire. P est donc irréductible.

Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'autres polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ irréductible. D'après le théorème de d'Alembert, P a (au moins) une racine complexe α (qui n'est pas réelle sinon on pourrait factoriser P par $X - \alpha$ et P ne serait pas irréductible). D'après la proposition précédente, $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P (et $\alpha \neq \overline{\alpha}$ sinon α serait réel). On peut donc factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ par $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$: il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})Q$.

Or $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - (\alpha + \overline{\alpha})X + \alpha\overline{\alpha} = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$: c'est un polynôme à coefficients réels. Par unicité de la division euclidienne, Q est également un polynôme à coefficients réels. Si $\deg P > 2$, alors Q n'est pas constant, donc P n'est pas irréductible : contradiction. Conclusion : P est un polynôme de degré 2, et il a deux racines complexes non réelles donc son discriminant est strictement négatif. $\square$

Remarque : Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui n'ont pas de racines réelles ne sont donc pas forcément irréductibles. S'ils ne sont pas de degré 2, ils ne sont pas irréductibles. Par exemple $X^4 + 1$ n'a pas de racines réelles mais on peut quand même le factoriser en écrivant que $X^4 + 1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$.

Le théorème 17 donne donc :

Théorème 25 *Tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ peut se décomposer de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de polynômes irréductibles :*

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + b_jX + c_j)^{\ell_j},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ (deux à deux distincts), $k_1, \ldots, k_p, \ell_1, \ldots, \ell_q \in \mathbb{N}^*$, et les $X^2 + b_jX + c_j$ sont des polynômes deux à deux distincts et de discriminants strictement négatifs.

6 Exemple : factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = X^n - 1$.

Les racines complexes de P sont les solutions de l'équation $z^n = 1$: ce sont les racines n^e de l'unité (cf chapitre 3). Elles sont de la forme $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Par conséquent, la décomposition en produit de polynômes irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right).$$

Pour obtenir la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines conjuguées. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\overline{e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}}$, et :

$$\begin{aligned}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(X - \overline{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}\right) &= X^2 - 2\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)X + \left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|^2 \\ &= X^2 - 2\cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right)X + 1.\end{aligned}$$

Remarquons également que si n est pair, alors P a deux racines réelles 1 et -1, alors que si n est impair, la seule racine réelle de P est 1.

La décomposition en produit de polynômes irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right) \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

$$X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2 - 2\cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right) \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

V Fractions rationnelles

1 Définition

Définition 12 *Une* **fraction rationnelle** *à coefficients dans K est un couple (A, B) de polynômes de $K[X]$ avec $B \neq 0$ qu'on note $\dfrac{A}{B}$.*

On note $K(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans K.

Égalité de deux fractions rationnelles :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC.$$

Ainsi on a par exemple $\dfrac{X^2}{X^3 + X} = \dfrac{X}{X^2+1}$.

Les opérations sur $K(X)$ sont définies de manière naturelle.

2 Décomposition en éléments simples

Proposition 26 *Soient $A \in K[X]$ et $x_1, \dots, x_n \in K$ deux à deux distincts. Il existe $Q \in K[X]$ et $a_1, \dots, a_n \in K$ tels que*

$$\frac{A}{(X-x_1)\dots(X-x_n)} = Q + \frac{a_1}{X-x_1} + \dots + \frac{a_n}{X-x_n}.$$

Cette écriture est la **décomposition en éléments simples** de $\dfrac{A}{(X-x_1)\dots(X-x_n)}$. La proposition est admise.

Remarque : On peut en fait montrer que toute fraction rationnelle $\dfrac{A}{B} \in K(X)$ peut s'écrire comme somme d'un polynôme (le quotient dans la division euclidienne de A par B) et de fractions rationnelles de la forme $\dfrac{a}{(X-x_0)^k}$ ou, si on travaille dans $\mathbb{R}[X]$, de la forme $\dfrac{\alpha X + \beta}{(X^2+pX+q)^k}$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $X^2 + pX + q$ irréductible). On peut retenir par exemple que :

1) Une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{A}{(X-x_1)(X-x_2)^2}$ peut se mettre sous la forme $Q + \dfrac{a}{X-x_1} + \dfrac{b_1}{X-x_2} + \dfrac{b_2}{(X-x_2)^2}$.

2) Une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{A}{(X-x_1)(X^2+pX+q)}$ (avec $X^2 + pX + q$ irréductible) peut se mettre sous la forme $Q + \dfrac{a}{X-x_1} + \dfrac{\alpha X + \beta}{X^2+pX+q}$.

3) Une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{A}{(X-x_1)(X^2+pX+q)^2}$ (avec $X^2 + pX + q$ irréductible) peut se mettre sous la forme $Q + \dfrac{a}{X-x_1} + \dfrac{\alpha_1 X + \beta_1}{X^2+pX+q} + \dfrac{\alpha_2 X + \beta_2}{(X^2+pX+q)^2}$.

Et ainsi de suite, mais en-dehors de la proposition précédente, l'énoncé doit normalement fournir la forme de la décomposition.

En pratique, pour décomposer $\dfrac{A}{B}$ en éléments simples, on procédera comme suit :

- Si $\deg A \geqslant \deg B$, alors on commence par effectuer la division euclidienne de A par B.
- On décompose B en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ selon le cas.
- On décompose en éléments simples : on écrit la décomposition a priori et on calcule les coefficients.

Exercice 3 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{3X^3 - 2X^2 + 3}{X^2 - 1}$.

3 Applications

La décomposition en éléments simples permet de calculer certaines sommes.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Elle permet également de calculer facilement les dérivées successives des fonctions rationnelles (il faut décomposer dans $\mathbb{C}[X]$).

Exercice 5 Calculer la dérivée d'ordre n de $x \mapsto \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 - 1}$.

Une autre application de la décomposition en éléments simples est le calcul des primitives des fonctions rationnelles (il faut décomposer dans $\mathbb{R}[X]$).

Exercice 6 Calculer :

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 - 1}\,dx \ ; \ \int \frac{dx}{x(x^2+1)} \ ; \ \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2}.$$