Corrigé DS5

Exercice 1 : Générateur de signaux

1. L'ALI peut fonctionner en régime linéaire car il y a présence d'une **boucle de rétroaction négative**.

2. Voir cours : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}}$.

3. On relie les tensions d'entrée et de sortie, d'abord dans l'espace complexe puis dans l'espace réel :

$$\underline{S} = -\frac{E}{jRC\omega} \xrightarrow{\mathbb{R}} \boxed{s(t) = -\frac{1}{RC}\int e(t)\mathrm{d}t}$$

Ce montage renvoie une tension de sortie proportionnelle à la primitive de la tension d'entrée, c'est un montage **intégrateur**. La tension d'entrée est rectangulaire, donc constante par morceaux. La primitive d'une fonction constante par morceaux est une fonction affine par morceaux. De plus le rectangle d'entrée est centré sur zéro donc les pentes du signal de sortie sont de signe opposés, c'est pourquoi on s'attend à observer un signal triangulaire en sortie.

4. On utilise l'expression obtenue à la question 3 :

$$s_{2p+1}(t) = -\frac{1}{RC}\int e(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{RC}\times\left(-\frac{1}{(2p+1)\omega}\frac{4E_m}{(2p+1)\pi}\cos\left[(2p+1)\omega t\right]\right)$$

$$\iff \boxed{s_{2p+1}(t) = \frac{4E_m}{(2p+1)^2\pi RC\omega}\cos\left[(2p+1)\omega t\right]}$$

Ce filtre est linéaire donc il respecte le principe de superposition : la tension de sortie $s(t)$ est égale à la somme des réponses à chaque composante de Fourier individuelle du signal d'entrée :

$$\boxed{s(t) = \frac{4E_m}{\pi RC\omega}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\left[(2p+1)\omega t\right]}{(2p+1)^2}}$$

Cette décomposition de Fourier correspond effectivement à celle d'un signal triangulaire, dont l'amplitude S_m vérifie, par identification :

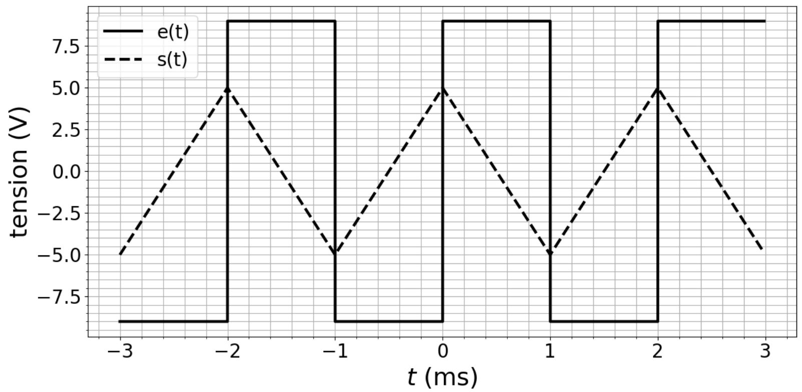
$$\frac{8S_m}{\pi^2} = \frac{4E_m}{\pi RC\omega} \iff \boxed{S_m = \frac{\pi E_m}{2RC\omega} = \frac{E_m}{4RCf}}$$

5. Pour que l'ALI reste à tout instant en régime linéaire il faut avoir :

$$S_m < V_{\text{sat}} \iff \boxed{R > \frac{E_m}{4CfV_{\text{sat}}} = 1\,\text{k}\Omega}$$

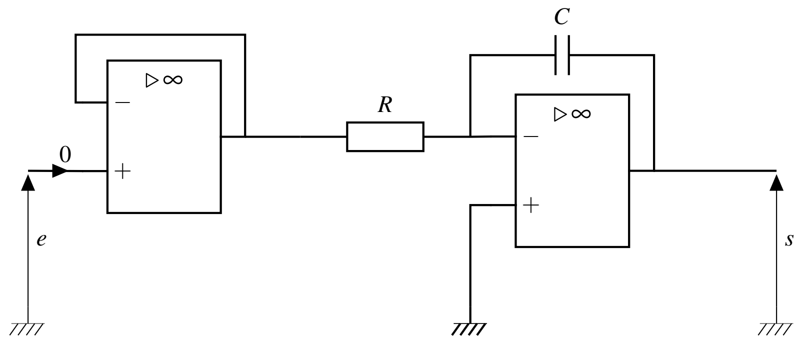
Il faut choisir une résistance R au moins égale à $1\,\text{k}\Omega$.

6. Si $R = 3\,\text{k}\Omega$ alors l'amplitude de $s(t)$ vaut : $S_m = 5\,\text{V}$. On trace ci-après l'allure de la tension de sortie.

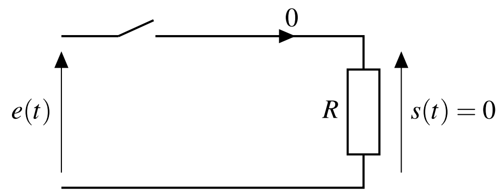


7. Voir cours : l'impédance d'entrée du montage est : $\boxed{\underline{Z}_e = R}$. Ce n'est pas idéal, il serait préférable d'avoir une impédance d'entrée infinie afin d'éviter une possible chute tension entre l'intégrateur et le montage situé en amont.

Pour améliorer le montage on pourrait placer un **suiveur** en amont de l'intégrateur. La fonction de transfert globale reste inchangée car le suiveur a une fonction de transfert unitaire : $\underline{H}(j\omega) = 1$. L'impédance d'entrée du suiveur est infinie car l'entrée est directement connectée à la borne non inverseuse de l'ALI. Cette méthode permet donc de fabriquer un intégrateur d'impédance d'entrée infinie.



8. Un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en BF et un court-circuit en HF. C'est le contraire pour une bobine. On représente ci-dessous le schéma équivalent du filtre en BF et en HF (c'est le même dans les deux cas) et on détermine la tension de sortie.



En BF et en HF on a $s = 0$ d'après la loi d'Ohm (pas de courant car le circuit est ouvert). Ce filtre coupe les BF et les HF, il s'agit d'un **filtre passe-bande**.

9. On applique la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On identifie les paramètres :

$$\boxed{H_0 = 1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{L}{R} = \dfrac{Q}{\omega_0} \\ \dfrac{1}{RC} = Q\omega_0 \end{cases} \implies \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

10. On simplifie la fonction de transfert en BF ($\omega \ll \omega_0$) et HF ($\omega \gg \omega_0$) :

$$\begin{cases} \text{BF} \quad \underline{H} \simeq \dfrac{j\omega}{Q\omega_0} \\ \text{HF} \quad \underline{H} \simeq \dfrac{\omega_0}{j\omega Q} \end{cases} \implies \begin{cases} \text{BF} \quad G_{\text{dB}} = 20\log\omega - 20\log(Q\omega_0) \\ \text{HF} \quad G_{\text{dB}} = -20\log\omega + 20\log\left(\frac{\omega_0}{Q}\right) \end{cases}$$

Le diagramme de Bode en gain présente une asymptote de pente 20 dB/dec en BF et de pente −20 dB/dec en HF (c'est cohérent avec le diagramme représenté en annexe).

Les asymptotes se croisent à la pulsation ω_0. L'ordonnée est alors égale à $-20\,\log Q$. Les coordonnées du point d'intersection des deux asymptotes est donc $\boxed{(\log\omega_0, -20\log Q)}$.

11. On a vu à la question précédente qu'en BF : $\underline{H} \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0} \implies s(t) \simeq \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$. Ce filtre présente un caractère **dérivateur** dans le domaine $\omega \ll \omega_0$.

On a également montré qu'en HF : $\underline{H} \simeq \frac{\omega_0}{j\omega Q} \implies s(t) \simeq \frac{\omega_0}{Q}\int e(t)\mathrm{d}t$. Ce filtre présente un caractère **intégrateur** dans le domaine $\omega \gg \omega_0$.

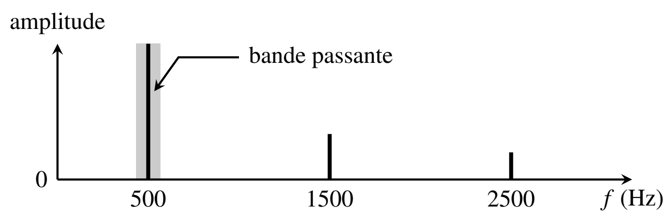
12. Les asymptotes se croisent à la fréquence propre. On mesure $\boxed{f_0 = 500\,\text{Hz}}$. Le point d'intersection des asymptotes a pour ordonnée −34 dB. On conclut que :

$$-20\log Q = -34\,\text{dB} \iff \boxed{Q = 10^{\frac{34}{20}} = 50}$$

Les fréquences de coupure correspondent ici à $G_{\text{dB}} = -3\,\text{dB}$. Il est difficile de les mesurer avec précision sur le graphe. On conclut en rappelant que la bande passante est reliée au facteur de qualité par :

$$\boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 10\,\text{Hz}}$$

13. La bande passante du filtre est [490 Hz, 510 Hz]. On représente ci-dessous l'allure du spectre en amplitude de la tension d'entrée $e(t)$ ainsi que la bande passante :



- La composante fondamentale du signal d'entrée se situe dans la bande passante, elle est transmise.
- Toutes les autres composantes du signal d'entrée se trouvent largement à l'extérieur de la bande passante, elles sont fortement atténuées.

On conclut que le spectre de la tension de sortie ne contient quasiment qu'une seule composante, à la fréquence $f = 500\,\text{Hz}$. Elle est donc **sinusoïdale**.

14. On calcule le gain et la phase du filtre pour une pulsation ω quelconque :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

Le signal d'entrée $e_1(t)$ est sinusoïdal de pulsation ω. Dans ce cas on peut donc écrire le signal de sortie sous la forme :

$$s_1(t) = G(\omega)\frac{4E_m}{\pi}\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

La fréquence de $e_1(t)$ est exactement la fréquence propre, or d'après les expressions écrites ci-dessus : $G(\omega_0) = 1$ et $\varphi(\omega_0) = 0$. On conclut que :

$$\boxed{s_1(t) = e_1(t) = \frac{4E_m}{\pi}\sin(\omega t)}$$

L'amplitude de cette tension vaut : $\boxed{S_{1m} = \frac{4E_m}{\pi} = 11{,}5\,\text{V}}$.

15. Le signal $e_3(t)$ est sinusoïdal de pulsation 3ω. On peut écrire :

$$\boxed{s_3(t) = G(3\omega)\frac{4E_m}{3\pi}\sin(3\omega t + \varphi(3\omega))}$$

L'amplitude de cette tension vaut : $\boxed{S_{3m} = G(3\omega)\frac{4E_m}{3\pi} = 0{,}045\,\text{V}}$.

16. La valeur efficace d'un signal périodique $y(t)$ est définie par :

$$\boxed{y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int y^2(t)\mathrm{d}t}}$$

Pour un signal sinusoïdal d'amplitude Y_m : $y_{\text{eff}} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}}$. On conclut que :

$$\boxed{S_{1\text{eff}} = \frac{S_{1m}}{\sqrt{2}} = 8{,}1\,\text{V}} \quad \text{et} \quad \boxed{S_{3\text{eff}} = \frac{S_{3m}}{\sqrt{2}} = 0{,}032\,\text{V}}$$

17. Le taux de distorsion harmonique vaut : $\boxed{\text{TDH} = 3{,}9 \cdot 10^{-3}}$. Les harmoniques de $s(t)$ sont très faibles comparés au fondamental. On peut considérer en première approximation que la tension $s(t)$ est sinusoïdale de fréquence $f = 500\,\text{Hz}$.