Chapitre 13

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

I Relations de comparaison (fonctions)

1 Fonction dominée par une autre

Définition 1 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f est* **dominée par g au voisinage de** *a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.*

On note alors $f(x) \overset{x\to a}{=} O(g(x))$ ou $f \overset{a}{=} O(g)$.

Exemple : $3x+5 \overset{x\to+\infty}{=} O(x)$ puisque $0 \leqslant \dfrac{3x+5}{x} = 3 + \dfrac{5}{x} \leqslant 4$ pour tout $x \geqslant 5$.

Proposition 1 *f est dominée par g au voisinage de a si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$ au voisinage de a.*

Démonstration :
La fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage V de a si et seulement s'il existe un $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in V$, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M$, ce qui équivaut à $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$. □

2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). On suppose que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f est* **négligeable devant g au voisinage de** *a si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$.*

On note alors $f(x) \overset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f \overset{a}{=} o(g)$.

Exemple : Au voisinage de $+\infty$, $x = o(x^2)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. En revanche, au voisinage de 0, $x^2 = o(x)$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Proposition 2 *f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de a sur lequel on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$.*

Démonstration : Il suffit d'écrire la définition de la limite. □

Proposition 3 *Si f est négligeable devant g au voisinage de a, alors elle est dominée par g au voisinage de a.*

Démonstration : Si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. □

Remarque : La réciproque est fausse (par exemple, au voisinage de 0, on a $x = O(x)$ mais pas $x = o(x)$).

3 Fonctions équivalentes

Définition 3 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit a un point de I ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). On suppose que f et g ne s'annulent pas sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f est* **équivalente** *à g au voisinage de a si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1$.*

On note alors $f(x) \overset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \overset{a}{\sim} g$.

Exemple : Au voisinage de 0 on a les équivalents usuels suivants :

$$\sin x \sim x \qquad \operatorname{Arcsin} x \sim x$$
$$\tan x \sim x \qquad \operatorname{Arctan} x \sim x$$
$$\operatorname{sh} x \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x$$
$$\operatorname{th} x \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$$

Ces équivalents se déduisent des limites usuelles vues au chapitre 4 ($\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, etc...) qui correspondent elles-mêmes aux dérivées en 0 des fonctions concernées.

Proposition 4

(i) Si $f \overset{a}{\sim} g$ *et que* $g \overset{a}{\sim} h$*, alors* $f \overset{a}{\sim} h$.

(ii) $f \overset{a}{\sim} g$ *si et seulement si* $f - g \overset{a}{=} o(g)$.

(iii) Si $f_1 \overset{a}{\sim} g_1$ *et que* $f_2 \overset{a}{\sim} g_2$*, alors* $f_1 \times f_2 \overset{a}{\sim} g_1 \times g_2$ *et* $\dfrac{f_1}{f_2} \overset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Démonstration :

(i) $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g(x)}{h(x)} \overset{x\to a}{\to} 1$.

(ii) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to a}{\to} 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)} \overset{x\to a}{\to} 0$.

(iii) $\dfrac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} \overset{x\to a}{\to} 1$ et $\dfrac{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}}{\frac{g_1(x)}{g_2(x)}} = \dfrac{f_1(x)g_2(x)}{g_1(x)f_2(x)} = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\dfrac{g_2(x)}{f_2(x)} \overset{x\to a}{\to} 1$. □

Remarques :

1) De (ii) on déduit que si $f = g + h$ et que $h \overset{a}{=} o(g)$, alors $f \overset{a}{\sim} g$. Par exemple, au voisinage de $+\infty$, $x^2+3x+1 \sim x^2$ car $3x+1 = o(x^2)$. Au voisinage de 0, $x^2+3x+1 \sim 1$ car $x^2+3x = o(1)$.

2) Ne jamais écrire $f \sim 0$: cela n'a aucun sens.

3) On ne peut pas, en général, additionner des équivalents. Par exemple, au voisinage de $+\infty$, on a $x^2+x+1 \sim x^2$ et $-x^2+3x-4 \sim -x^2$. Si on ajoutait les équivalents on obtiendrait $(x^2+x+1)+(-x^2+3x-4) \sim x^2 - x^2 \sim 0$ ce qui n'a aucun sens. En fait $(x^2+x+1)+(-x^2+3x-4) = 4x-3 \sim 4x$.

4) D'après le (ii), au lieu de $f \sim g$ on peut écrire $f = g + o(g)$ où $o(g)$ désigne une fonction négligeable devant g (qui est en fait $f-g$). Dans les calculs cette écriture est parfois plus pratique, en particulier quand on veut additionner des équivalents. Par exemple on a vu que, au voisinage de 0, $\sin x \sim x$ et $\ln(1+x) \sim x$, donc

$$\sin x + \ln(1+x) = x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x)$$

donc $\sin x + \ln(1+x) \sim 2x$. Noter qu'en soustrayant on obtient

$$\sin x - \ln(1+x) = x + o(x) - (x + o(x)) = o(x)$$

(et non 0 car les deux $o(x)$ ne désignent pas forcément la même fonction), ce qui ne permet pas d'obtenir un équivalent (pour cela il faudra utiliser les développements limités).

• Équivalents et logarithmes, exponentielles, puissances

Proposition 5 *Soient* f *et* g *deux fonctions à valeurs strictement positives. Si* $f \overset{a}{\sim} g$ *et que* $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$ *ou* $+\infty$*, alors* $\ln f \overset{a}{\sim} \ln g$.

Démonstration : $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = \dfrac{\ln\left(g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln g(x)} = \dfrac{\ln g(x) + \ln\frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)} = 1 + \dfrac{\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)} \to 1$ quand $x \to a$ car $\ln g(x) \to \pm\infty$. □

Remarques :

1) Attention, cela ne marche pas si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 1$. Par exemple, au voisinage de 0, on a $1+x \sim 1$ mais pas $\ln(1+x) \sim \ln 1 = 0$ qui n'a aucun sens (en fait $\ln(1+x) \sim x$).

2) Équivalents et exponentielles : en général cela ne marche pas. $f \overset{a}{\sim} g$ n'implique pas $e^f \overset{a}{\sim} e^g$. Par exemple, au voisinage de $+\infty$, $x+1 \sim x$ mais $e^{x+1} \not\sim e^x$ car $\dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e \not\to 1$.

Proposition 6 *Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f \overset{a}{\sim} g$ alors $f^\alpha \overset{a}{\sim} g^\alpha$.*

Démonstration : $\dfrac{f^\alpha}{g^\alpha} = \left(\dfrac{f}{g}\right)^\alpha \to 1$. □

Attention : α est ici une *constante*.

Exercice 1 Montrer que $1 - \cos x \overset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha - 1 \overset{x \to 0}{\sim} \alpha x$.

• Applications des équivalents

Proposition 7 *Si $f \overset{a}{\sim} g$ et que $\lim\limits_a g = \ell$ ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$), alors $\lim\limits_a f = \ell$.*

Démonstration : Il suffit d'écrire que $f = \dfrac{f}{g} \times g$ et que $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1$. □

Remarque : Deux fonctions qui ont la même limite en a ne sont pas nécessairement équivalentes : par exemple, $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, mais $x^2 \overset{0}{\not\sim} x$ puisque $\dfrac{x^2}{x} = x \to 0$ et non 1.

Proposition 8 *Si $f \overset{a}{\sim} g$, alors f et g sont de même signe au voisinage de a.*

Démonstration : $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a donc est strictement positif au voisinage de a. □

Remarque : Attention, c'est un résultat *local* (i.e. au voisinage de a et pas sur l'ensemble de l'intervalle où f et g sont définies).

Proposition 9 *(Théorème des gendarmes pour les équivalents) Si $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a et que $f \overset{a}{\sim} h$, alors $g \overset{a}{\sim} h$.*

Démonstration : Il existe un voisinage V de a tel que $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in V \setminus \{a\}$. Par conséquent on a $\frac{f(x)}{h(x)} \leqslant \frac{g(x)}{h(x)} \leqslant 1$ ou $\frac{f(x)}{h(x)} \geqslant \frac{g(x)}{h(x)} \geqslant 1$ pour tout $x \in V \setminus \{a\}$. Le théorème des gendarmes permet de conclure. □

4 Croissances comparées

Proposition 10

(i) Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$:

$$(\ln x)^\beta \overset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha).$$

$$|\ln x|^\beta \overset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $a > 1$:

$$x^\alpha \overset{x \to +\infty}{=} o(a^x).$$

Démonstration :

En étudiant la fonction $x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$, on montre facilement que, pour tout $x > 0$, on a $\ln x \leqslant \sqrt{x}$, donc, pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ également.

Soient $\alpha, \beta > 0$. En écrivant $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha} \dfrac{\ln x^{\alpha/\beta}}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$, puis, en posant $X = \dfrac{1}{x}$, que $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{|\ln X|^\beta}{X^\alpha} = 0$. Si $\beta \leqslant 0$, ces résultats sont immédiats.

Enfin, si $a > 1$, $\dfrac{x^\alpha}{a^x} = \dfrac{e^{\alpha \ln x}}{e^{x \ln a}} = e^{\alpha \ln x - x \ln a}$ et d'après le (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\alpha \ln x - x \ln a) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$. □

Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - x \ln x + 2}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \ln x + e^x - 1}{xe^{-2x} + e^{x+1} + \sin(1 + e^x)}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) + \operatorname{sh} x}{\ln(1 - x)}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(x^2).\ln(1 + \sin x)}{(x^2 + x)\sqrt{x^2 + 1}}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{\ln x}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

II Développements limités

Dans tout le paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Définition

Définition 4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur I (resp. sur $I \setminus \{a\}$). On dit que f admet un* **développement limité d'ordre** n **en** a *s'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et une fonction ε définie sur un voisinage V de a tels que, pour tout $x \in V$ (resp. pour tout $x \in V \setminus \{a\}$) :*

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

La fonction $x \mapsto (x-a)^n\varepsilon(x)$ est donc négligeable devant $(x-a)^n$ au voisinage de a. On écrira :

$$f(x) \overset{x\to a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

le $o((x-a)^n)$ désignant une fonction négligeable devant $(x-a)^n$ au voisinage de a.

Le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \ldots + \lambda_n(x-a)^n$ est la **partie régulière** du développement limité.

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \neq 1$, on sait que $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

Or on peut écrire $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = x^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \to 0$ quand x tend vers 0.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet donc un développement limité d'ordre n en 0 :

$$\frac{1}{1-x} \overset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

En remplaçant x par $-x$, on en déduit que :

$$\frac{1}{1+x} \overset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Remarques :

1) On peut toujours se ramener à un développement limité en 0 en posant $x = a + h$. Le DL s'écrit alors :

$$f(a+h) \overset{h\to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \ldots + \lambda_n h^n + o(h^n).$$

2) Si f admet un DL d'ordre n en a, alors elle admet un DL d'ordre m en a pour tout $m \leqslant n$. En effet, si :

$$f(x) \overset{x\to a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \ldots + \lambda_m(x-a)^m + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

alors :

$$f(x) \overset{x\to a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \ldots + \lambda_m(x-a)^m + o((x-a)^m).$$

On dit que le second DL est obtenu par **troncature** du premier.

2 Propriétés

• DL ET DÉRIVABILITÉ

Proposition 11 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I. f admet un développement limité d'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a. Ce développement est*

$$f(x) \overset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Démonstration : Cf chapitre 9. □

Remarques :

1) Si f est définie en a et que $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + o(x-a)$ au voisinage de a, on peut affirmer que f est dérivable en a, que $f(a) = \lambda_0$ et que $f'(a) = \lambda_1$, et donc que la droite d'équation $y = \lambda_0 + \lambda_1(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

2) On ne peut pas généraliser ce résultat : f peut avoir un DL d'ordre 2 en a sans être 2 fois dérivable en a. Par exemple la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas deux fois dérivable en 0 (faire le calcul) mais on peut écrire $f(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ et $x^3 \sin \dfrac{1}{x} = o(x^2)$ au voisinage de 0. En revanche, si une fonction f est n fois dérivable en un point a, elle admet un DL d'ordre n en a (cf remarque 3 après le théorème 20).

• Unicité du DL

Proposition 12 *Si f admet un développement limité d'ordre n en a, celui-ci est unique.*

Plus précisément, si $f(x) \overset{x \to a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ et que $f(x) \overset{x \to a}{=} \mu_0 + \mu_1(x-a) + \ldots + \mu_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors $\lambda_k = \mu_k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Démonstration :
Supposons que les parties régulières des deux DL de f ci-dessus soient différentes.

Soit k le premier indice tel que $\lambda_k \neq \mu_k$. En soustrayant on obtient $0 \overset{x \to a}{=} (\lambda_k - \mu_k)(x-a)^k + (\lambda_{k+1} - \mu_{k+1})(x-a)^{k+1} + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)(x-a)^n + o((x-a)^n)$, puis, en divisant par $(x-a)^k$, $0 \overset{x \to a}{=} (\lambda_k - \mu_k) + (\lambda_{k+1} - \mu_{k+1})(x-a) + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)(x-a)^{n-k} + o((x-a)^{n-k})$.

En faisant tendre x vers a, on obtient $0 = \lambda_k - \mu_k$, donc $\lambda_k = \mu_k$, ce qui est contraire à notre hypothèse. □

• DL en 0 et parité

Proposition 13 *Si la fonction f admet un DL en 0 et qu'elle est paire (resp. impaire), alors la partie régulière du DL ne contient que des termes de degré pair (resp. impair).*

Démonstration :
Supposons que f est paire et que $f(x) \overset{x \to 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots + \lambda_n x^n + o(x^n)$.

On a $f(-x) = f(x)$ donc on a aussi $f(x) \overset{x \to 0}{=} \lambda_0 - \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 - \lambda_3 x^3 + \ldots + (-1)^n \lambda_n x^n + o(x^n)$.
Par unicité du DL on en déduit que $\lambda_1 = -\lambda_1$, $\lambda_3 = -\lambda_3$, etc... et donc que $\lambda_1 = \lambda_3 = \ldots = 0$.

Le raisonnement est analogue pour une fonction impaire. □

3 Opérations sur les développements limités

• Somme et produit par un réel

Proposition 14 *Si f et g admettent un DL d'ordre n en a, alors $f+g$ aussi. La partie régulière du DL de $f+g$ est la somme des parties régulières des DL de f et de g.*

Démonstration :

Si $f(x) \overset{x \to a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ et que $g(x) \overset{x \to a}{=} \mu_0 + \mu_1(x-a) + \mu_2(x-a)^2 + \ldots + \mu_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors $f(x) + g(x) \overset{x \to a}{=} (\lambda_0 + \mu_0) + (\lambda_1 + \mu_1)(x-a) + (\lambda_2 + \mu_2)(x-a)^2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)(x-a)^n + o((x-a)^n)$. □

Remarque : Les DL de f et de g doivent être **de même ordre**.

Proposition 15 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si f admet un DL d'ordre n en a, alors αf aussi. La partie régulière du DL de αf s'obtient en multipliant par α la partie régulière du DL de f.*

Exercice 3 On admet que l'on a, au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$. Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto 3e^x - \sqrt{1+x}$.

• Produit

Proposition 16 *Si f et g admettent un DL d'ordre n en a, alors $f \times g$ aussi, et la partie régulière de ce DL s'obtient en prenant les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières des DL de f et de g.*

Démonstration :
Supposons que l'on ait, au voisinage de 0, $f(a+h) = P(h) + h^n \varepsilon_1(h)$ et $g(a+h) = Q(h) + h^n \varepsilon_2(h)$, où P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0$.
Alors $f(a+h) \times g(a+h) = (P(h) + h^n \varepsilon_1(h)) \times (Q(h) + h^n \varepsilon_2(h)) = P(h)Q(h) + P(h)h^n \varepsilon_2(h) + Q(h)h^n \varepsilon_1(h) + h^{2n} \varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h) = P(h)Q(h) + h^n(P(h)\varepsilon_2(h) + Q(h)\varepsilon_1(h) + h^n \varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h))$.
$P(h)Q(h)$ est un polynôme en h de degré inférieur ou égal à $2n$. On peut écrire $P(h)Q(h) = A(h) + h^{n+1}B(h)$ où A et B sont des polynômes, avec A de degré inférieur ou égal à n.

On a ainsi $f(a+h) \times g(a+h) = A(h) + h^n \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) = P(h)\varepsilon_2(h) + Q(h)\varepsilon_1(h) + h^n \varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h) + hB(h) \overset{h \to 0}{\to} 0$. □

Remarque : Les DL de f et de g doivent être **de même ordre**.

Exercice 4 On admet que l'on a, au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$. Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x\sqrt{1+x}$.

• Quotient

Proposition 17 *Si f et g admettent un DL d'ordre n en a et que le coefficient constant du DL de g est non nul, alors $\dfrac{f}{g}$ admet un DL d'ordre n en a.*

Démonstration :
Supposons que, au voisinage de 0, $g(a+h) = \mu_0 + \mu_1 h + \mu_2 h^2 + \ldots + \mu_n h^n + o(h^n)$ avec $\mu_0 \neq 0$.
Alors on peut écrire $g(a+h) = \mu_0(1+k(h)+o(h^n))$ en posant $k(h) = \dfrac{\mu_1}{\mu_0}h + \dfrac{\mu_2}{\mu_0}h^2 + \ldots + \dfrac{\mu_n}{\mu_0}h^n$. On a ainsi $\dfrac{1}{g(a+h)} = \dfrac{1}{\mu_0} \times \dfrac{1}{1+k(h)+o(h^n)}$.
Or, puisque $\lim\limits_{h\to 0} k(h) = 0$, on a $\dfrac{1}{1+k(h)+o(h^n)} = 1 - k(h) + k(h)^2 - k(h)^3 + \ldots + (-1)^n k(h)^n + o(k(h)^n)$ (DL de $\dfrac{1}{1+X}$ en 0). On voit clairement que $o(k(h)^n) = o(h^n)$, et on obtient le DL de $\dfrac{1}{1+k(h)+o(h^n)}$ en gardant dans $1 - k(h) + k(h)^2 - k(h)^3 + \ldots + (-1)^n k(h)^n$ les termes de degré inférieur ou égal à n.
Finalement le DL de $\dfrac{f(a+h)}{g(a+h)}$ s'obtient en écrivant que $\dfrac{f(a+h)}{g(a+h)} = f(a+h) \times \dfrac{1}{g(a+h)}$ et en utilisant la proposition précédente. □

Méthode pratique : on détermine le DL de $\dfrac{1}{g}$ grâce au DL de $\dfrac{1}{1+X}$ ou de $\dfrac{1}{1-X}$ en 0, puis le DL du produit $f \times \dfrac{1}{g}$.

Exemple : On admet que l'on a, au voisinage de 0, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$. On va déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan.
On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. On commence par calculer le DL de $\dfrac{1}{\cos x}$. Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)} \\ &= \frac{1}{1-X} \text{ en posant } X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5).\end{aligned}$$

Or on a $\dfrac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + o(X^2)$ et on a bien $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} \overset{x\to 0}{\to} 0$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il était inutile d'aller plus loin dans le DL de $\dfrac{1}{1-X}$ car en développant $X^3 = \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right)^3$ on n'aurait obtenu que des termes négligeables devant x^5.

Il suffit maintenant de calculer le DL du produit $\sin x \times \dfrac{1}{\cos x}$:

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x \times \frac{1}{\cos x} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).\end{aligned}$$

Puisque la fonction tan est impaire, on peut même dire que $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$ au voisinage de 0.

4 Primitivation des développements limités

• DL d'une primitive

Proposition 18 *Si f admet un DL d'ordre n en a et que F est une primitive de f au voisinage de a, alors F admet un DL d'ordre $n+1$ en a. La partie régulière du DL de F est la primitive de la partie régulière du DL de f qui vaut $F(a)$ en a.*

Autrement dit, si $f(x) \overset{x \to a}{=} \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors

$$F(x) \overset{x \to a}{=} F(a) + \lambda_0(x-a) + \lambda_1 \frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + \lambda_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Ce résultat est admis.

Exemples :

1) On a vu que $\dfrac{1}{1+x} \overset{x \to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $]-1, +\infty[$ et $\ln(1+0) = 0$, donc :

$$\ln(1+x) \overset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

2) De même on a $\dfrac{1}{1+x^2} \overset{x \to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$ donc

$$\operatorname{Arctan} x \overset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

• DL et dérivée

On ne peut pas, en général, dériver un DL : si f admet un DL d'ordre n en a, alors f' n'a pas forcément de DL en a.

Considérons par exemple la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors on peut écrire $f(x) = 0 + 0.x + x.x \sin \dfrac{1}{x} \overset{x \to 0}{=} 0 + 0.x + o(x)$ puisque $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. f admet donc un DL d'ordre 1 en 0.

Par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ (proposition 11). Mais si $x \neq 0$ on a $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas : f' n'est pas continue en 0. Elle ne peut donc pas admettre de DL en 0.

On a cependant le résultat suivant, qui est une conséquence immédiate de la proposition précédente :

Proposition 19 *Si f admet un DL d'ordre n en a, que f est dérivable au voisinage de a et que f' admet un DL d'ordre $n-1$ en a, alors la partie régulière du DL de f' est la dérivée de la partie régulière du DL de f.*

5 Formule de Taylor-Young

• Formule de Taylor-Young

Théorème 20 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors f admet un DL d'ordre n en tout point $a \in I$. Plus précisément, au voisinage de a, on a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Démonstration : Admis pour l'instant. □

Remarques :

1) En posant $x = a + h$ on obtient, au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

2) Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I admet donc un développement limité à tout ordre en tout point de I.

3) En fait le théorème est encore valable si f est seulement n fois dérivable en a (hors-programme).

• DL USUELS

a) Exponentielle et fonctions associées :

La fonction exp est indéfiniment dérivable, donc elle admet un DL à tout ordre en 0, et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\exp^{(k)} = \exp$, donc $\exp^{(k)}(0) = 1$, et la formule de Taylor-Young donne :

$$e^x \overset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

La fonction sh est indéfiniment dérivable, donc elle admet un DL à tout ordre en 0, et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{sh}^{(k)} = \mathrm{sh}$ si k est pair et ch si k est impair, donc $\mathrm{sh}^{(k)}(0) = 0$ si k est pair et 1 si k est impair. La formule de Taylor-Young donne :

$$\mathrm{sh}\, x \overset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

De même :

$$\mathrm{ch}\, x \overset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

On peut retrouver ces formules à partir des relations $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. On peut également remarquer que ch est la partie paire de l'exponentielle et sh sa partie impaire.

La fonction sin est indéfiniment dérivable, donc elle admet un DL à tout ordre en 0.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $\sin^{(k)} = \begin{cases} \sin \text{ si } k = 4p \\ \cos \text{ si } k = 4p+1 \\ -\sin \text{ si } k = 4p+2 \\ -\cos \text{ si } k = 4p+3 \end{cases}$, donc $\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k = 4p \\ 1 \text{ si } k = 4p+1 \\ 0 \text{ si } k = 4p+2 \\ -1 \text{ si } k = 4p+3 \end{cases}$.

La formule de Taylor-Young donne :

$$\sin x \overset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

De même :

$$\cos x \overset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

On peut aussi retrouver ces formules à partir des formules d'Euler $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

b) Développement du binôme en 0 :

Soit α un réel. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, donc elle admet un DL à tout ordre en 0.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par récurrence on montre facilement que $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ pour tout $x > -1$, donc $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)$.

La formule de Taylor-Young donne :

$$(1+x)^\alpha \overset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Exemple : DL de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 en 0 :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3). \end{aligned}$$

Exercice 5 Déterminer le DL de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 en 0.

6 Exemples de développements limités d'une composée

Exemple 1 : DL de $\ln(1+\sin x)$ à l'ordre 3 en 0

On a vu que $\sin x \overset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et que $\ln(1+X) \overset{X\to 0}{=} X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$. Au voisinage de 0 on a donc :

$$\begin{array}{rcl}
\ln(1+\sin x) & = & \ln(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)) \\
& = & \left(x-\frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\
& = & x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
& = & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)
\end{array}$$

Exemple 2 : DL de $e^{\cos x}$ à l'ordre 5 en 0

On a $\cos x \overset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $e^X \overset{X\to 0}{=} 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$. Au voisinage de 0 on a donc :

$$\begin{array}{rcl}
e^{\cos x} & = & e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)} \\
& = & e \times e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)} \\
& = & e \times \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5)\right) \\
& = & e \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)\right) \\
& = & e \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right) \\
& = & e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5)
\end{array}$$

On notera qu'ici on ne peut pas utiliser le DL de e^X en 0 dès la première ligne car $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0. D'autre part l'ordre 2 a suffi pour le DL de e^X car dans X^3 tous les termes auraient été négligeables devant x^5.

Exemple 3 : DL de $x^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3 en 1

Pour tout $x > 0$, on a $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln(1+h)}{1+h}}$ en posant $x = 1+h$ pour se ramener à un DL en 0.

Au voisinage de 0 on a :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\ln(1+h)}{1+h} & = & \frac{1}{1+h} \times \ln(1+h) \\
& = & (1-h+h^2-h^3+o(h^3)) \times (h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)) \\
& = & h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - h^2 + \frac{h^3}{2} + h^3 + o(h^3) \\
& = & h - \frac{3h^2}{2} + \frac{11h^3}{6} + o(h^3)
\end{array}$$

donc :

$$\begin{array}{rcl}
e^{\frac{\ln(1+h)}{1+h}} & = & e^{h-\frac{3h^2}{2}+\frac{11h^3}{6}+o(h^3)} \\
& = & 1 + \left(h - \frac{3h^2}{2} + \frac{11h^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(h - \frac{3h^2}{2} + \frac{11h^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(h - \frac{3h^2}{2} + \frac{11h^3}{6}\right)^3 + o(h^3) \\
& = & 1 + h - \frac{3h^2}{2} + \frac{11h^3}{6} + \frac{1}{2}\left(h^2 - 3h^3\right) + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3) \\
& = & 1 + h - h^2 + \frac{h^3}{2} + o(h^3)
\end{array}$$

et finalement en remplaçant h par $x-1$, on obtient le DL cherché au voisinage de 1 :

$$x^{\frac{1}{x}} = 1 + (x-1) - (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + o((x-1)^3).$$

7 Exemples de développements asymptotiques

Exemple 1 : $e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

Au voisinage de 0 on a $e^X = 1 + X + \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{6} + o(X^3)$ et $\dfrac{1}{x} \overset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc au voisinage de $+\infty$ on a :

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On a obtenu un **développement asymptotique** de $e^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$: une somme de fonctions dont chacune est négligeable par rapport à la précédente. Contrairement aux DL, ces fonctions ne sont pas nécessairement des puissances positives.

Exemple 2 : $\dfrac{x^2}{x+1}$ en $+\infty$

On va se ramener au DL de $\dfrac{1}{1+X}$ en 0 en faisant apparaître $\dfrac{1}{x}$. Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x+1} &= \frac{x^2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{x}{1+\frac{1}{x}} \\
&= x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\
&= x \times \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
&= x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Exemple 3 : $\sqrt{x^2+2x-3}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Étude en $+\infty$:

Comme dans l'exemple précédent, on commence par mettre en facteur le terme prépondérant pour se ramener à un DL en 0. Au voisinage de $+\infty$, x est positif, donc $\sqrt{x^2} = x$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x-3} &= \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} \\
&= x \times \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}
\end{aligned}$$

Or au voisinage de 0 on a $\sqrt{1+X} = (1+X)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + o(X^2)$, donc au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x-3} &= x \times \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x \times \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{8}\frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x \times \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x + 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2x-3}$ admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x+1$ en $+\infty$, et elle est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (car $-\dfrac{2}{x} < 0$ pour tout $x > 0$).

Étude en $-\infty$:

Au voisinage de $-\infty$, x est négatif, donc $\sqrt{x^2} = -x$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x-3} &= \sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} \\
&= -x \times \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} \\
&= -x \times \left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= -x-1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

La courbe admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -x-1$ en $+\infty$, et elle est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$ (car $\dfrac{2}{x} < 0$ pour tout $x < 0$).

Exemple 4 : x^x en 0

Pour tout $x > 0$ on a $x^x = e^{x\ln x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $e^X \overset{X\to 0}{=} 1 + X + \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$, donc au voisinage de 0 :

$$x^x = 1 + x\ln x + \frac{(x\ln x)^2}{2} + o((x\ln x)^2).$$

III Relations de comparaison (suites)

On s'intéresse dans ce paragraphe au *comportement asymptoptique* (i.e. lorsque n tend vers $+\infty$) des suites réelles.

1 Suite dominée par une autre

Définition 5 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que la suite (u_n) est* **dominée** *par la suite (v_n) si la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée.*

On note alors :

$$u_n \overset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$$

ou simplement $u_n = O(v_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple : $3n+5 = O(n)$ puisque $0 \leqslant \dfrac{3n+5}{n} = 3 + \dfrac{5}{n} \leqslant 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 21 *La suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) si et seulement s'il existe un réel positif M tel que $|u_n| \leqslant M|v_n|$ à partir d'un certain rang.*

Démonstration :

On peut supposer, sans perte de généralité, que la suite (v_n) ne s'annule pas (même chose pour toutes les preuves de ce paragraphe).

($\Rightarrow$) Supposons que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Il existe donc un $M \geqslant 0$ tel que, pour tout n, $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M$, soit $|u_n| \leqslant M|v_n|$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $M \geqslant 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|u_n| \leqslant M|v_n|$. Alors pour $n \geqslant n_0$ on a $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M$, et avant n_0, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs, donc la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. $\square$

2 Suite négligeable devant une autre

Définition 6 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que la suite (u_n) est* **négligeable** *devant la suite (v_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.*

On note alors :

$$u_n \overset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

ou simplement $u_n = o(v_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 22 *La suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel on a $|u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.*

Démonstration : Il suffit d'écrire la définition de la limite. □

Exemple : $n \overset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2} = 0$.

Proposition 23 *Si (u_n) est négligeable devant (v_n), alors elle est dominée par (v_n).*

Démonstration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. □

Remarque : La réciproque est fausse (par exemple, si $u_n = v_n$ alors on a $u_n = O(v_n)$ mais pas $u_n = o(v_n)$).

3 Suites équivalentes

• Définition et propriétés

Définition 7 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est* **équivalente** *à (v_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.*

On note alors :

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

ou simplement $u_n \sim v_n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 24

(i) Si $u_n \sim v_n$ et que $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

(ii) $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ et que $w_n \sim x_n$, alors $u_n \times w_n \sim v_n \times x_n$ et $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.

Démonstration : Comme pour les fonctions. □

• Équivalents et logarithmes, exponentielles, puissances

Proposition 25 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs et différents de 1. Si $u_n \sim v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ou $+\infty$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.*

Démonstration : $\dfrac{\ln u_n}{\ln v_n} = \dfrac{\ln\left(v_n \frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln v_n} = \dfrac{\ln v_n + \ln \frac{u_n}{v_n}}{\ln v_n} = 1 + \dfrac{\ln \frac{u_n}{v_n}}{\ln v_n} \to 1$ quand $n \to +\infty$ car $\ln v_n \to \pm\infty$. □

Remarques :

1) Attention, cela ne marche pas si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. Par exemple on a $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ mais pas $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim \ln 1 = 0$ qui n'a aucun sens.

2) Avec les exponentielles, cela ne marche pas : $u_n \sim v_n$ n'implique pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$. Par exemple on a $n+1 \sim n$ mais $e^{n+1} \not\sim e^n$ car $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e \not\to 1$.

Proposition 26 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs. Soit α un réel. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.*

Démonstration : $\dfrac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \to 1$. □

Attention : α est ici une *constante* (indépendante de n).

• Applications des équivalents

Proposition 27 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

Démonstration : Il suffit d'écrire que $u_n = \frac{u_n}{v_n} v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. $\square$

Remarque : Deux suites qui ont la même limite ne sont pas nécessairement équivalentes : par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, mais $n^2 \not\sim n$ puisque $\frac{n^2}{n} = n \to +\infty$ et non 1.

Proposition 28 *Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors, à partir d'un certain rang, elles sont de même signe.*

Démonstration :
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, il existe un rang à partir duquel on a $\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$, soit $\frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n$ (si $v_n > 0$) ou $\frac{3}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2} v_n$ (si $v_n < 0$), donc u_n et v_n sont de même signe. $\square$

Proposition 29 *(Théorème des gendarmes pour les équivalents) Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et que $u_n \sim w_n$, alors $v_n \sim w_n$.*

4 Comparaison des suites de référence

• Limite d'une suite géométrique

Proposition 30

(i) Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

(ii) Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

(iii) Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(iv) Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

Démonstration :
(i) Si $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ avec $a > 0$. Alors $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence ou binôme de Newton), et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+na) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
(ii) Si $q = 1$, alors $q^n = 1$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
(iii) Si $-1 < q < 1$, alors $\frac{1}{|q|} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
(iv) Si $q \leqslant -1$, alors les suites extraites (q^{2n}) et (q^{2n+1}) ont des limites différentes, donc la suite (q^n) n'a pas de limite. $\square$

• Croissances comparées

Proposition 31

(i) Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$:
$$(\ln n)^\beta = o(n^\alpha).$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $a > 1$:
$$n^\alpha = o(a^n).$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$:
$$a^n = o(n!).$$

Démonstration :
(i) et (ii) se déduisent des résultats analogues pour les fonctions.
(iii) Si $|a| \leqslant 1$ c'est immédiat. Supposons $|a| > 1$. Soit $p = \lfloor |a| \rfloor$. Pour tout $n \geqslant p$ on peut écrire $\frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^p}{p!} \times \frac{|a|}{p+1} \times \frac{|a|}{p+2} \times \ldots \times \frac{|a|}{n}$.
Pour tout $k > p$ on a $\frac{|a|}{k} \leqslant 1$, donc $\frac{|a|^n}{n!} \leqslant \frac{|a|^p}{p!} \frac{|a|}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a|^p}{p!} \frac{|a|}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$. $\square$

Exercice 6 Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de :
$$\frac{n^2+n+1}{2n+3} \ ; \ \frac{3^n \ln n + n^{12} - n^2 e^n}{\ln(1+e^n) + \sqrt{n} \ln n - \sin(n!)} \ ; \ \sin\frac{1}{n} \ ; \ \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}.$$

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS EN 0

Tous ces DL sont à savoir impérativement. En cas de doute, il est bon de savoir également les retrouver rapidement.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$