Devoir n°18 (non surveillé)

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si $AA^T = I$.

1) Vérifier que la matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A est orthogonale si et seulement si elle est inversible et que $A^{-1} = A^T$.

b) En déduire que A est orthogonale si et seulement si $A^T A = I$.

3) a) Montrer que le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.

b) Montrer que l'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

c) La somme de deux matrices orthogonales est-elle orthogonale ?

4) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

b) Montrer que toute matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est d'une des deux formes ci-dessus. On rappelle que si a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe un réel θ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

EXERCICE 2

On note E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des nombres réels.

1) Montrer que E est stable par l'addition, la multiplication par un réel et le produit matriciel, c'est-à-dire que si M et M' sont dans E et que $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $M + M'$, αM et MM' sont aussi dans E.

2) Montrer que $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ab \neq 0$, et, dans ce cas, déterminer M^{-1}.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$.

a) On suppose que $a \neq b$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \begin{pmatrix} a^p & c\frac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$.

b) On suppose que $a = b$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$. On exprimera ses coefficients en fonction de a, c et p.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$. Pour tout réel x, on pose $\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}$. On admet que $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = e^x$.

a) On suppose $a \neq b$. Exprimer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, b, c, \varphi_n(a)$ et $\varphi_n(b)$, en déduire que les suites (α_n), (β_n) et (γ_n) convergent et calculer leurs limites, que l'on notera α, β et γ respectivement.

b) On suppose $a = b$. Exprimer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, c, \varphi_{n-1}(a)$ et $\varphi_n(a)$, en déduire que les suites (α_n), (β_n) et (γ_n) convergent et calculer leurs limites, que l'on notera α, β et γ respectivement.

5) Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$, on pose $f(A) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où les coefficients α, β et γ sont définis comme à la question précédente. On définit ainsi une application f de E dans E.

a) Montrer que f est injective.

b) f est-elle surjective ?

c) Montrer que $f(E)$ est l'ensemble des éléments de E dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.