Fiche d'exercices : Analyse asymptotique

Exercice 1 Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de :

1. $\dfrac{x+x^2}{\sin x}$
2. $\dfrac{1}{x}+\ln x$
3. $\dfrac{x+\operatorname{sh} x}{e^x \sin x}$
4. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+2)}$
5. $\dfrac{x+\ln x}{\sin x}$
6. $\dfrac{x\ln x}{\sin x}$
7. $\dfrac{\sin x.\ln(1+x^2)}{x\tan x}$
8. $\dfrac{\sin 3x.\sin 5x}{(x-x^3)^2}$
9. $\dfrac{2\tan x-\sin 2x}{\sin^3 x}$
10. $\dfrac{x\ln x}{x^x-1}$
11. $(1+x)^{x^2+\frac{3}{x}}$
12. $\dfrac{xe^{\sin x}}{\ln x}$

Exercice 2 Déterminer, si elle existe, la limite en a de :

1. $\dfrac{e^x-e}{x^2-1}$ $(a=1)$
2. $\dfrac{x^2-5x+6}{\sin(\pi x)}$ $(a=2)$
3. $\dfrac{\sin x}{x-\pi}$ $(a=\pi)$
4. $(\ln x)^{\ln x}$ $(a=1)$
5. $\tan x.\tan 2x$ $(a=\dfrac{\pi}{2})$
6. $\dfrac{\sin x-\sin e}{\ln x-1}$ $(a=e)$

Exercice 3 Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de :

1. $\dfrac{x+1}{x-1}$
2. $\dfrac{x^3+\sin x+e^{-x}}{x\ln x}$
3. $x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$
4. $x\sin\dfrac{1}{x}$
5. $\ln(\operatorname{ch} x)-x$
6. $(x^2+x+1)^{\frac{1}{x}}$
7. $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+4}$

Exercice 4 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre demandé de :

1. $\cos(2x)$ (4)
2. $\cos(x^2)$ (4)
3. $\sqrt[3]{1-x}$ (3)
4. e^{2x+1} (3)
5. $\sqrt{1+x}.\ln(1+x)$ (3)
6. $\sin^2 x$ (4)
7. $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ (5)
8. $\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{2x}{1+x^2}$ (4)
9. $\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ (5)
10. $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ (3)
11. $\dfrac{x}{e^x-1}$ (3)
12. $\ln(1+x+x^2)$ (4)
13. $\ln(\cos x)$ (5)
14. $\sin(\sin x)$ (6)
15. $(1+x)^x$ (4)
16. $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ (2)
17. $(x+2)^{\sin x}$ (3)

Exercice 5 Déterminer le développement limité à l'ordre n en a de :

$\ln x$ $(a=1, n=3)$; $\ln x$ $(a=2, n=3)$; e^{2x} $(a=2, n=3)$; $\sqrt{1+x^2}$ $(a=1, n=4)$.

Exercice 6 Déterminer le développement limité de la fonction Arcsin à l'ordre 6 en 0.

Exercice 7 Déterminer le développement limité de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln(\operatorname{ch} t)dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 8 Retrouver le développement limité de la fonction tan à l'ordre 6 en 0 :

1) En utilisant une équation différentielle dont tan est solution.
2) En utilisant le développement limité de Arctan.

Exercice 9 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sh} x}{\sin^3 x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-e^x+x}{x+x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\alpha x)}{\ln(\cos\beta x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)\tan\frac{\pi x}{2}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x}{\tan(\tan x)-x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$
14. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)$
15. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\ln(1-x)\cos\frac{\pi x}{2}$

Exercice 10 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x^6+3x^5+x^4}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e.x\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{Arccos}^2 x}{\ln x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\operatorname{Arctan}(1+x)-\operatorname{Arctan}(1-x)}$

Exercice 11 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x\in I$. Déterminer la limite de $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ lorsque h tend vers 0.

Exercice 12 Montrer que la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\operatorname{Arctan}^{(n)}(0)$.

Exercice 14 Étudier l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de la fonction f et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ dans les cas suivants :

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\ ;\ f(x)=\ln(\operatorname{ch} x)\ ;\ f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^4+x^3+x^2}.$$

Exercice 15 Déterminer un développement asymptotique à trois termes de th en $+\infty$.

Exercice 16 Déterminer un développement asymptotique à trois termes de la fonction réciproque de sh en $+\infty$.

Exercice 17 Déterminer un équivalent simple des suites de terme général :

1. $\dfrac{2n^5-4n^2+3}{3n^2-8n+7}$
2. n^2+2^n
3. 2^n+3^n
4. $\dfrac{e^n}{1+e^n}-1$
5. $\ln(n\ln n)$
6. $1+2+\ldots+n$
7. $\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n}$
8. $\ln(n+1)-\ln n$
9. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
10. $\dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}$
11. $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n-1$

Exercice 18 Étudier la convergence des suites de terme général :

1. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
2. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
3. $(-1)^n(2+3(-1)^n)$
4. $\sqrt{n^2+n+1}-n$
5. $\dfrac{n^2+n\sin n+1}{2+\cos n}$
6. $\dfrac{|e^n-n!|+2n^2-1}{3n^2+\ln\sqrt{n^4+n+1}}$
7. $n^2(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n})$
8. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$
9. $n\left(\operatorname{Arctan} n-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercice 19 On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1) Étudier la monotonie de (H_n).

2) Établir, pour tout entier $n>1$, l'encadrement $\ln(n+1)-\ln n\leqslant\dfrac{1}{n}\leqslant\ln n-\ln(n-1)$.

3) En déduire la nature de la suite (H_n), et montrer que $H_n\sim\ln n$ au voisinage de $+\infty$.

4) Montrer que la suite de terme général $H_n-\ln n$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 20 Soit p un entier naturel. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$.

1) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\int_{k-1}^{k}x^p\,dx\leqslant k^p\leqslant\int_{k}^{k+1}x^p\,dx$.

2) En déduire que $S_n\sim\dfrac{n^{p+1}}{p+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

1) Étudier la monotonie de (u_n).

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant\sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.

3) En déduire qu'il existe un réel C tel que $\dbinom{2n}{n}\sim C\dfrac{4^n}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) Déterminer la valeur de C en utilisant la formule de Stirling : $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}$.

Exercice 22 Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x^2+x+1)^n}dx$.

1) Établir, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$, l'encadrement $1-x\leqslant\dfrac{1}{x^2+x+1}\leqslant\dfrac{1}{1+x}$.

2) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, calculer sa limite et donner un équivalent simple de I_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 23 Pour tout entier naturel n on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.

1) Étudier la monotonie et la convergence de la suite (I_n).

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $I_n=\dfrac{\ln 2}{n}-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^n)dx$.

3) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on utilisera l'inégalité $\ln(1+x)\leqslant x$ valable pour tout $x>-1$).

Exercice 24

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $x+\ln x=n$ admet une solution unique, que l'on notera x_n.

2) Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Montrer que $x_n\sim n$ au voisinage de $+\infty$.

4) Montrer que $x_n-n\sim-\ln n$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 25

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\cos x=nx$ a une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$. On note x_n cette solution.

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3) Déterminer un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4) Déterminer un équivalent de $x_n-\dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26 On considère la suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $I_n=\displaystyle\int_0^1(1-x)^ne^{-x}dx$.

1) Étudier la monotonie de la suite (I_n). Que peut-on en déduire ?

2) Déterminer la limite de la suite (I_n) en majorant e^{-x} pour tout x de $[0,1]$.

3) Établir, pour tout entier naturel n, la relation $I_{n+1}=1-(n+1)I_n$.

4) En déduire que $I_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.