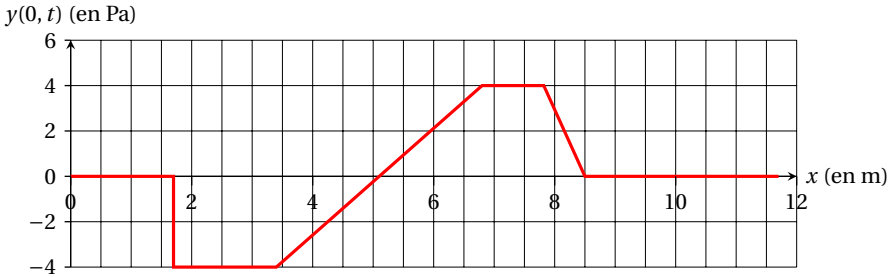
Corrigé DM17

Exercice : Effet Doppler

1. On commence par déterminer où se trouve le front avant et le front arrière de l'onde à $t_0 = 25\,\text{ms}$.

- La source commence à émettre le signal à la date $t = 0$. Entre $t = 0$ et t_0 cet état vibratoire se propage sur une distance $d = c t_0 = 8,5\,\text{m}$. **le front avant de l'onde se trouve en $x = 8,5\,\text{m}$ à la date t_0.**
- La source finit d'émettre le signal à la date $t_1 = 20\,\text{ms}$. Entre t_1 et t_0 cet état vibratoire se propage sur une distance $d = c(t_0 - t_1) = 1,7\,\text{m}$. **le front arrière de l'onde se trouve en $x = 1,7\,\text{m}$ à la date t_0.**

Entre ces deux dates on trace l'allure spatiale du signal à partir de l'allure temporelle en opérant un renversement du graphe dans la direction horizontale (typique du passage spatial↔temporel).



2. La longueur d'onde vaut : $\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = 3,4\,\text{m}}$.

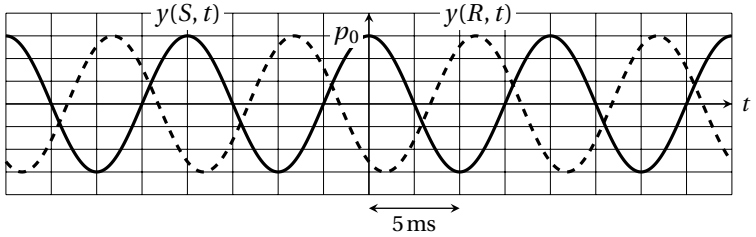
3. L'onde se propage à la vitesse c entre $x = 0$ (source) et x_R (récepteur). Le retard temporel vaut $\tau = \frac{x_R}{c}$. On en déduit que le signal enregistré par le récepteur vaut :

$$p(R,t) = p(S, t-\tau) = p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x_R}{c}\right)\right) \iff \boxed{p(R,t) = p_0 \cos(\omega t - k x_R)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

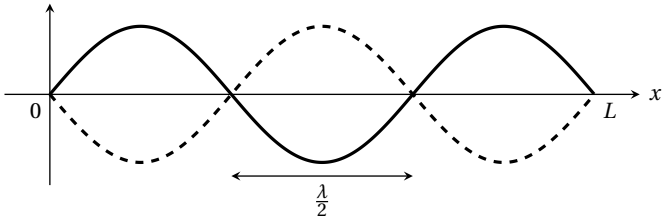
4. Le déphasage entre $y(S,t)$ et $y(R,t)$ vaut :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\tau = 2\pi f \frac{x_R}{c} = 3,7\,\text{rad} = 212°}$$

On trace d'abord le graphe de $p(S,t)$ (maximal en $t = 0$) puis on obtient le graphe de $p(R,t)$ par une translation de $\tau = \frac{x_R}{c} = 5,9\,\text{ms}$ vers les t croissants. La période des signaux vaut $T = \frac{1}{f} = 10\,\text{ms}$.



5. On trace l'allure de la vibration entre la source et la paroi. D'après les indications de l'énoncé il y a **trois fuseaux**.



Chaque fuseau ayant une largeur égale à $\frac{\lambda}{2}$, on en déduit que : $\boxed{L = \frac{3\lambda}{2} = 5,1\,\text{m}}$.

6. D'après les indications de l'énoncé la position du récepteur est : $\boxed{x_R(t) = vt}$.

7. Le signal arrive au récepteur avec un retard temporel par rapport à la source : $\tau = \frac{x_R}{c} = \frac{vt}{c}$. Le signal enregistré par le récepteur s'écrit :

$$p(R,t) = p(S, t-\tau) = p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{vt}{c}\right)\right) = p_0 \cos\left(\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)t\right)$$

Le récepteur enregistre un signal de pulsation apparente : $\boxed{\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$.

8. La fréquence apparente vaut $f' = f\left(1 - \frac{v}{c}\right)$. L'écart relatif entre les deux fréquences vaut :

$$\boxed{\frac{f' - f}{f} = -\frac{v}{c} = -6,5\,\%}$$

9. L'état vibratoire se propage de la source (position $x_S(t')$) jusqu'au récepteur ($x_R = 0$). Le retard temporel est donc égal à $\tau = \frac{x_S(t')}{c}$. D'après les indications de l'énoncé la position de la source est donnée par la relation : $x_S(t') = vt'$. On en déduit que :

$$\tau = t - t' = \frac{vt'}{c} \iff t' = \frac{t}{1 + \frac{v}{c}}$$

En réinjectant dans l'expression de τ on obtient finalement :

$$\boxed{\tau = t - \frac{t}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{vt}{v + c}}$$

10. En suivant le même raisonnement qu'à la question 8 on trouve :

$$p(R,t) = p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{vt}{v+c}\right)\right) = p_0 \cos\left(\frac{\omega}{1 + \frac{v}{c}}t\right)$$

Le récepteur enregistre un signal de pulsation apparente : $\boxed{\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{v}{c}}}$.

11. La fréquence apparente vaut $f' = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}}$. L'écart relatif entre les deux fréquences vaut :

$$\boxed{\frac{f' - f}{f} = -\frac{v}{c + v} = -6,1\,\%}$$

12. Le retard temporel du signal reçu par R par rapport à celui émis par S vaut $\tau = \frac{SR}{c} = \frac{r}{c}$. On peut donc écrire :

$$p(R,t) = p(S, t-\tau) = p_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right)$$

D'après l'indication de l'énoncé la pulsation apparente vaut :

$$\omega' = \frac{\mathrm{d}\Phi_R}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) = \omega\left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right)$$

Il reste à déterminer $\dot{r}$. Pour cela on utilise le fait qu'il s'agit de **la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}_r$** :

$$\dot{r} = \vec{v}\cdot\vec{u}_r = v\vec{u}_x\cdot\vec{u}_r = -v\cos\theta$$

On conclut que la pulsation apparente vaut : $\omega' = \omega\left(1 + \frac{v\cos\theta}{c}\right)$, autrement dit $f' = f\left(1 + \frac{v\cos\theta}{c}\right)$. L'écart relatif en fréquence vaut :

$$\boxed{\frac{f'-f}{f} = \frac{v\cos\theta}{c}}$$