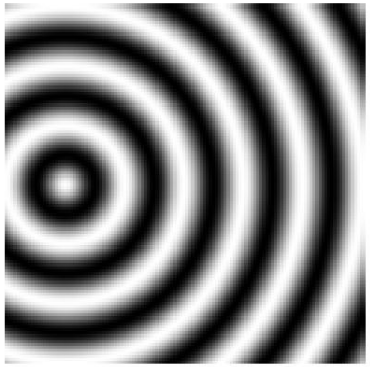
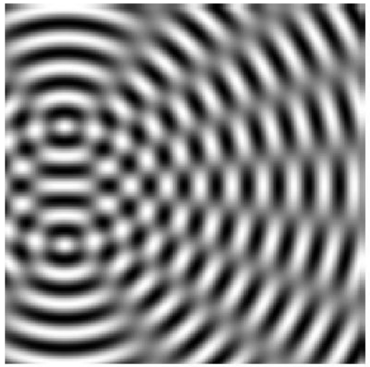
Chapitre 17 : Interférences à deux ondes

Problématique : Si l'on crée des vagues à la surface d'une cuve à onde à l'aide d'un vibreur, on observe une onde circulaire qui s'éloigne du centre. Si l'on place deux vibreurs et qu'on les fait vibrer en phase, on observe sur la cuve des points où l'amplitude des vagues est très importantes et d'autres où l'amplitude est nulle (voir figures ci-dessous : les zones très contrastées sont celles où l'amplitude est forte, les zones grisées, celles où l'amplitude est la plus faible).





- Comment interpréter ce phénomène avec l'outil mathématique ?
- Dans quelles conditions des ondes peuvent-elles s'amplifier ou s'annihiler l'une l'autre ?
- Que se passe-t-il si les ondes ont des fréquences différentes mais très proches ?

1 Superposition de deux ondes synchrones

1.1 Linéarité et principe de superposition

Rappelons que nous considérons des ondes se propageant dans des milieux linéaires, c'est-à-dire tels que les ondes observées sont décrites mathématiquement par une équation différentielle linéaire. L'une des conséquence de cette linéarité est appelée ***principe de superposition*** :

En présence de plusieurs sources émettant chacune une onde dans l'espace, l'onde résultante observée en tout point de l'espace est égale à la somme des ondes créées par chaque source.

Si on note respectivement $s_1(M,t)$ et $s_2(M,t)$ les vibrations des deux ondes au même point M de l'espace alors la vibration résultante sera :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

Rq : Si $s_1(M,t)$ et $s_2(M,t)$ sont sinusoïdales de fréquence f alors $s(M,t)$ est aussi sinusoïdale de fréquence f. On va montrer dans ce chapitre que l'amplitude de l'onde résultante dépend des amplitudes des ondes qui interfèrent mais surtout du déphasage entre ces ondes.

1.2 Conditions d'interférences

Considérons deux sources ponctuelles émettant des ondes progressives sinusoïdales **synchrones** et un point M où se superposent ces deux ondes. On note $\Delta\varphi(M) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M)$ l'avance de phase de l'onde 1 sur l'onde 2 en M. Nous verrons par la suite que l'étude des interférences est indépendante du signe de $\Delta\phi$(M) (autrement dit indépendante du choix $\varphi_1(M) - \varphi_2(M)$ ou $\varphi_2(M) - \varphi_1(M)$) . C'est pourquoi, par abus de language, nous appellerons par la suite $\Delta\varphi(M)$ le **déphasage** bien que cette quantité soit algébrique. Puisque les ondes sont synchrones, le déphasage ne dépend pas du temps. À l'aide de relations trigonométriques, on établit un résultat important.

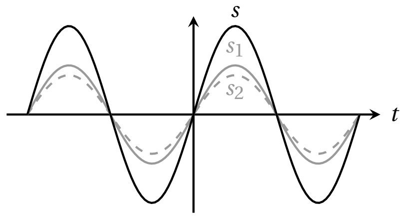
La superposition de deux vibrations sinusoïdales synchrones d'amplitudes A_1 et A_2, déphasées d'un angle $\Delta\varphi(M)$, est une vibration sinusoïdale de même fréquence et dont l'amplitude résultante A vérifie :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi(M))}$$

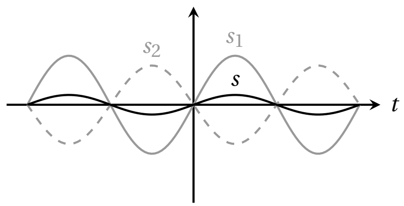
On constate que :

- l'amplitude vibratoire résultante est **maximale** lorsque les deux vibrations sont **en phase**. On parle *d'interférences constructives*.
- À l'inverse l'amplitude vibratoire résultante est **minimale** lorsque les deux vibrations sont **en opposition de phase**. On parle *d'interférences destructives*.

On illustre ces deux cas de figure sur les graphes ci-dessous, montrant deux vibrations synchrones $s_1(t)$ et $s_2(t)$ qui se superposent, ainsi que la vibration résultante $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.



Interférences constructives



Interférences destructives

Déphasage et nature des interférences

- les interférences sont constructives si et seulement si les deux vibrations sont **en phase** : $\boxed{\Delta\varphi = 0\ [2\pi]}$;
- les interférences sont destructives si et seulement si les deux vibrations sont **en opposition de phase** : $\boxed{\Delta\varphi = \pi\ [2\pi]}$.

1.3 Calcul du déphasage

On considère deux sources situées en S_1 et S_2 qui produisent des ondes synchrones de pulsation ω. Dans le cas général, le déphasage entre les deux signaux qui se superposent en un point M quelconque de l'espace, peut s'écrire comme la somme de trois contributions :

- une contribution due à un **déphasage initial entre les deux sources**.
- une contribution due à une **différence entre les temps de propagation** entre les chemins $S_1 \to M$ et $S_2 \to M$;
- une contribution apparaissant dans des cas particuliers, par exemple une **réflexion sur un obstacle plan**. Dans ces cas de figure la valeur du déphasage sera toujours admise.

1.4 Différence de marche, ordre d'interférence

On définit la différence de marche $\delta(M)$ et l'ordre d'interférence $p(M)$ de la manière suivante :

$$\boxed{p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{\Delta t(M)}{T} = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}}$$

avec λ la période spatiale (longueur d'onde) et T la période temporelle de l'onde.

Calcul d'une différence de marche

Dans le cas le plus fréquent où les deux ondes sont issues de la même source (pas de déphasage initial entre les sources) et se propagent dans le même milieu homogène, la différence de marche vaut :

$$\boxed{\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)}$$

avec (S_1M) et (S_2M) les distance totales parcourues, respectivement sur les chemins $S_1 \to M$ et $S_2 \to M$.

À retenir : si un phénomène (généralement une réflexion sur un obstacle) produit un déphasage supplémentaire de π pour l'une des deux ondes, cela est équivalent à **rajouter $\lambda/2$ à la distance parcourue**.

1.5 Nouvelle expression des conditions d'interférences

On peut exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives de deux ondes en termes de différence de marche ou bien d'ordre d'interférence.

Différence de marche et nature des interférences

Interférences constructives ssi $\delta(M)$ est un **multiple entier de λ** : $\boxed{\delta = 0\ [\lambda]}$;

Interférences destructives ssi $\delta(M)$ est un **multiple demi-entier de λ** : $\boxed{\delta = \frac{\lambda}{2}\ [\lambda]}$.

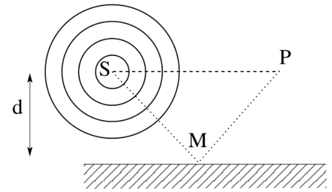
Ordre d'interférence et nature des interférences

Interférences constructives ssi $p(M)$ est un **entier** : $\boxed{p = 0\ [1]}$;

Interférences destructives ssi $p(M)$ est un **demi-entier** : $\boxed{\delta = \frac{1}{2}\ [1]}$.

1.6 Application

Une pointe vibrante crée des ondes circulaires à la surface d'une cuve à ondes, de longueur d'onde $\lambda = 1,2\,\text{cm}$. ces ondes se réfléchissent sur un obstacle plan supposé très long. Le point S et le point P sont à la même distance $d = 8,7\,\text{cm}$ de l'obstacle et séparés d'une distance $\text{SP} = 2d$.



Décrire la nature des interférences au point P sachant que la réflexion sur le plan s'accompagne d'un déphasage égal à π.

1.7 Retour sur les ondes stationnaires

Il est possible d'interpréter l'onde stationnaire qui apparaît lors de la réflexion d'une onde progressive sinusoïdale sur une paroi rigide en terme d'interférences constructives et destructives.

2 Cas particulier des ondes lumineuses

Les interférences entre ondes lumineuses ont l'avantage de pouvoir être observées à l'œil nu. On admet qu'elle ne sont observables qu'à condition que les ondes **soient issues de la même source**. Par la suite nous considérerons donc qu'il n'y a jamais de déphasage initial entre les sources.

2.1 Chemin optique

Chemin optique entre deux points

On considère un rayon lumineux qui se propage d'un point A vers un point B. Le chemin optique entre ces deux points est défini par :

$$(AB) = \tau_{AB} \times c$$

avec τ_{AB} le temps de propagation entre A et B, et c la célérité de la lumière dans le vide. Le chemin optique est **homogène à une longueur** mais c'est une grandeur qui mesure **le temps de propagation d'une onde lumineuse entre deux points**.

On retient les propriétés suivantes :

- Dans un milieu homogène transparent et isotrope d'indice de réfraction n le chemin optique vaut : $\boxed{(AB) = nL_{AB}}$, avec L_{AB} la distance parcourue entre A et B.
- Si le rayon est réfracté (donc change de milieu), on additionne les chemins optiques dans chacun des milieux.
- Certaines réflexions modifient la phase de l'onde lumineuse de π. Cela est équivalent à **rajouter** $\frac{\lambda}{2}$ au chemin optique, avec λ la longueur d'onde *dans le vide* de l'onde lumineuse.

Chemin optique et différence de marche

Soient deux ondes lumineuses issues de la même source S et interférant en un point M après avoir suivi des chemins différents (notés 1 et 2). La différence de marche entre ces deux ondes, au point M, vaut :

$$\boxed{\delta(M) = (SM)_{\text{chemin 2}} - (SM)_{\text{chemin 1}}}$$

2.2 Formule de Fresnel

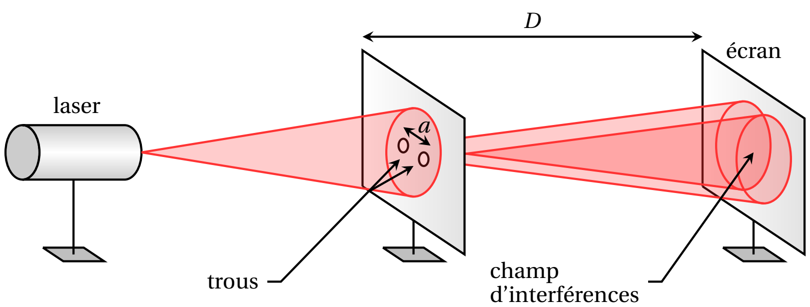
Formule de Fresnel

On suppose que deux ondes lumineuses de même intensité I_0 interfèrent en un point M de l'espace. La formule de Fresnel (admise et démontrée en deuxième année), permet d'exprimer l'intensité lumineuse $I(M)$ en fonction de I_0 et de la différence de marche $\delta(M)$:

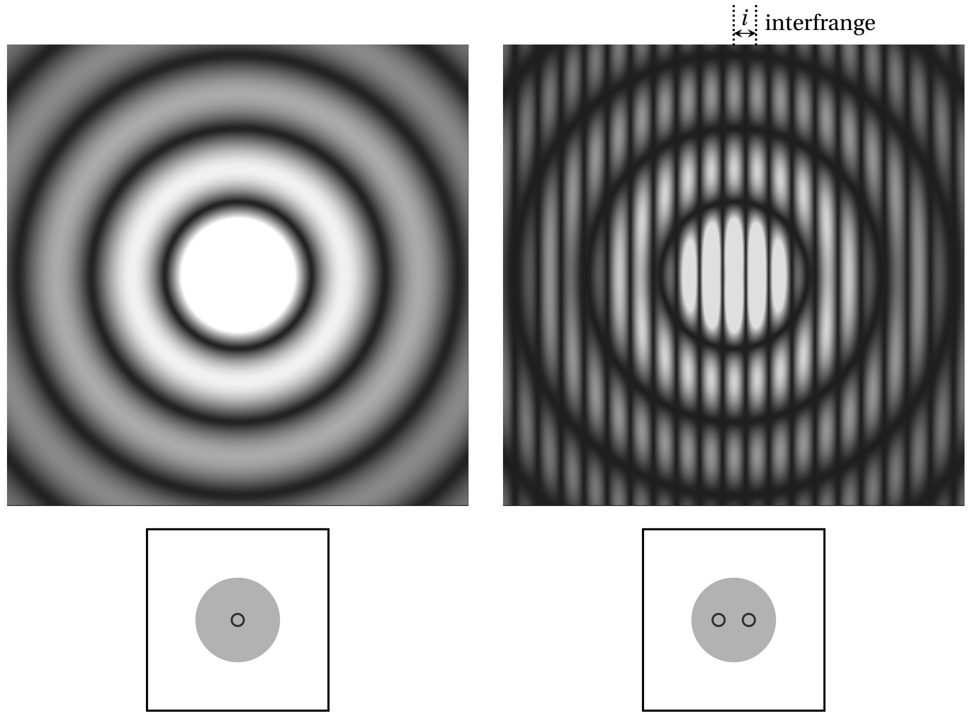
$$\boxed{I(M) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\right)\right]}$$

3 Montage des trous d'Young

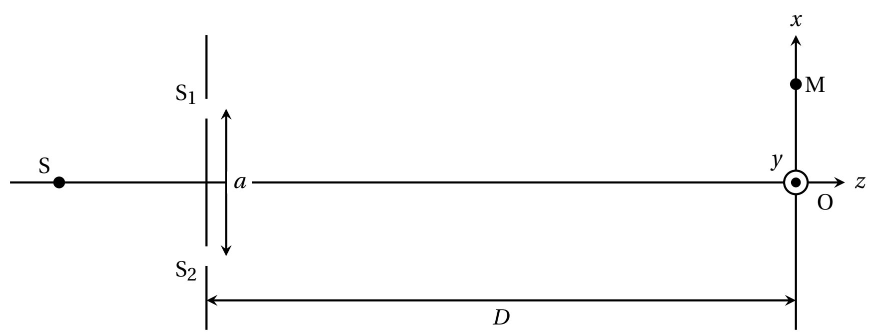
3.1 Schéma du montage et observations



Un faisceau laser éclaire un plan percé de deux trous de petit diamètre, distants de a, appelés *trous d'Young*. Chacun d'entre eux diffracte la lumière incidente, de sorte que les deux faisceaux émergents peuvent se recouvrir sur un écran éloigné d'une distance $D \gg a$ du plan des trous. On admet que les faisceaux issus des deux trous sont cohérents entre eux, ce qui permet d'observer une figure d'interférences sur l'écran. On montre ci-dessous (à gauche) la figure de diffraction obtenue sur l'écran lorsque le plan est percé d'un unique trou, puis (à droite) la figure d'interférences observée avec deux trous.



D'un point de vue optique, chaque trou se comporte comme une source lumineuse secondaire qui éclaire l'écran. Comme les ondes passant par chacun des deux trous sont issues de la même source primaire, celles-ci peuvent **interférer sur l'écran**. On modélise schématiquement le système de la manière suivante :



- La source S est supposée ponctuelle, située à égale distance des deux trous, et monochromatique (longueur d'onde dans le vide λ),
- les centres des deux trous sont distants de a,
- on regarde la figure d'interférences sur un écran situé à grande distance : $a \ll D$,
- on repère un point de l'écran par ses coordonnées cartésiennes (x, y). On considère un point proche de l'axe : $x \ll D$ et $y \ll D$.

3.2 Allure des franges, interfrange

Def : On appelle **frange d'interférence** l'ensemble des points de l'écran correspondant à une même valeur de la différence de marche. Tous les points appartenant à la même frange ont la même luminosité.

On appelle **franges claires** (resp. **franges sombres**) celles qui correspondent à des interférences constructives (resp. destructives).

Pour déterminer mathématiquement l'allure des franges d'interférences, il faut d'abord calculer la différence de marche en un point de l'écran. En utilisant (entre autres) l'approximation $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq \alpha\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \ll 1$, on montre que :

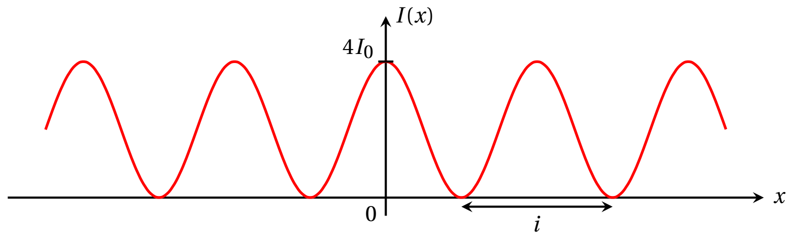
$$\delta(x, y) = \frac{ax}{D}$$

La différence de marche est indépendante de y, ce qui signifie que les franges d'interférences sont les courbes définies par $x = \text{Cste}$, autrement dit des droites parralèles à l'axe (Oy). C'est conforme aux observations.

À partir du résultat précédent, on peut exprimer l'intensité lumineuse en tout point de l'écran grâce à la formule de Fresnel :

$$I(x) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda D}\right)\right]$$

où I_0 est l'intensité lumineuse observée sur l'écran lorsqu'il n'y a qu'une seule onde, autrement dit l'intensité lumineuse obtenue dans le cas d'une diffraction à travers un seul trou. La contribution des interférences intervient *via* une fonction périodique de x, ce qui est là encore cohérent avec l'observation.



Def : On appelle **interfrange** i la période spatiale des franges.

Avec les trous d'Young, l'interfrange de la figure d'interférences vaut :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

L'interfrange est inversement proportionnel à la distance qui sépare les centres des deux trous.

4 Battements

Lorsque deux ondes sinusoïdales de fréquences f_1 et f_2 différentes mais proches ($|f_2 - f_1| \ll f_1$ et $|f_2 - f_1| \ll f_2$) se superposent, il apparaît un phénomène particulier appelé **battements**. L'amplitude résultante est **modulée dans le temps**, avec une fréquence bien particulière. On admet le résultat suivant :

La fréquence f des battements est égale à la différence des fréquences des deux ondes qui se superposent : $f = |f_2 - f_1|$.

Si l'on représentait graphiquement l'allure de la vibration au point M, voici à quoi cela ressemblerait (cas où les deux ondes qui se superposent ont exactement la même amplitude) :