Correction du DNS 16

EXERCICE 1

1) L'équation est équivalente à $y' + \dfrac{2x-1}{x^2}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto 2\ln x + \dfrac{1}{x}$ donc les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$$y(x) = \lambda e^{-2\ln x - 1/x} = \lambda e^{-2\ln x} e^{-1/x} = \frac{\lambda}{e^{\ln x^2}} e^{-1/x} = \frac{\lambda}{x^2} e^{-1/x}$$

où λ est un réel quelconque.

2) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ d'après les théorèmes sur les opérations. Plus précisément, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ces intervalles et la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto e^{-1/x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition, et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc f aussi par produit.

3) On trouve que $f'(x) = \dfrac{1-2x}{x^4} e^{-1/x}$ et que $f''(x) = \dfrac{6x^2-6x+1}{x^6} e^{-1/x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

4) On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = +\infty$ et en posant $X = 1/x$ on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \lim_{X\to+\infty} X^2 e^{-X} = 0$ donc f est continue à droite mais pas à gauche en 0.

La fonction n'est donc pas dérivable à gauche en 0, mais $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} e^{-1/x} = \lim_{X\to+\infty} X^3 e^{-X} = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

5) La fonction tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Sa dérivée est du signe de $1-2x$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1/2]$ et strictement décroissante sur $[1/2,+\infty[$.

La dérivée seconde de f est du signe de $6x^2-6x+1$ dont les racines sont $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$. La fonction est donc convexe sur $]-\infty,0[$, sur $]0,x_1]$ et sur $[x_2,+\infty[$. Elle est concave sur $[x_1,x_2]$.

7) On raisonne par récurrence. La propriété à démontrer est vraie pour $n=0$ en prenant $P_0(x) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\
&= \frac{P_n'(x)x^{2n+2} - P_n(x)(2n+2)x^{2n+1}}{x^{4n+4}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x^2P_n'(x) - (2n+2)xP_n(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x^2P_n'(x) - (2n+2)xP_n(x) + P_n(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x^2P_n'(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

où on a posé $P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

Le théorème de récurrence permet de conclure.

8) On a vu que $P_0(x) = 1$ et d'après la question 3) on a $P_1(x) = 1-2x$ et $P_2(x) = 6x^2-6x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. D'après la relation de la question 7) on a $P_3(x) = x^2P_2'(x) + (1-6x)P_2(x) = -24x^3+36x^2-12x+1$.

9) On raisonne par récurrence. Le résultat est vrai pour $n=0$ car $P_0(x) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_n(x) = (-1)^n(n+1)!x^n + \ldots + 1$. Alors, à partir de la relation $P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x) + P_n(x)$ on voit que le coefficient constant de $P_{n+1}(x)$ est égal à celui de $P_n(x)$, donc 1, et que son terme de plus haut degré est

$$\begin{aligned}
x^2(-1)^n(n+1)!nx^{n-1} - 2(n+1)x(-1)^n(n+1)!x^n &= (-1)^n(n+1)!(n-2(n+1))x^{n+1} \\
&= (-1)^n(n+1)!(-n-2)x^{n+1} \\
&= (-1)^{n+1}(n+2)!x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Le théorème de récurrence permet de conclure.

EXERCICE 2

1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(\sin x - 1)\,dx.$$

Or, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin^n(x) \geqslant 0$ et $\sin x - 1 \leqslant 0$, donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante.

3) On a $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\sin(x)\,dx$.

On intègre par parties. Posons $u(x) = \sin^{n+1}(x)$ et $v(x) = -\cos x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, $u'(x) = (n+1)\sin^n(x)\cos x)$ et $v'(x) = \sin x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc

$$I_{n+2} = \left[-\sin^{n+1}(x)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2(x)\,dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2(x)\,dx.$$

Or $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^n(x) - \sin^{n+2}(x)\right)dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}.$$

Par conséquent, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, d'où $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

4) Montrons par récurrence les formules demandées. Pour $p = 0$, ce sont les résultats de la question 1).

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et que $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

La relation du c) donne

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}I_{2p} = \frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2 2(p+1)}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+1)!(2p+2)}{(2^p p!)^2 2^2 (p+1)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3}I_{2p+1} = \frac{2(p+1)(2^p p!)^2}{(2p+1)!(2p+3)} = \frac{2^2(p+1)^2(2^p p!)^2}{(2p+1)!(2p+2)(2p+3)} = \frac{(2^{p+1}(p+1)!)^2}{(2p+3)!}.$$

Le théorème de récurrence permet de conclure.

5) La suite (I_n) est décroissante, donc, pour tout $n \geqslant 0$, on a $I_n \geqslant I_{n+1} \geqslant I_{n+2}$.

En divisant par I_n (qui est non nul d'après la question précédente) on obtient $1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+2}}{I_n}$.

Or $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ d'après la question 3) et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

6) Montrons par récurrence que $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au rang initial $(n = 0)$, on a $1 I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 1).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Alors

$$(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème de récurrence, on a donc bien $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) On peut écrire $nI_n^2 = \frac{n}{n+1}(n+1)I_n I_{n+1}\frac{I_n}{I_{n+1}}$.

Or $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1, $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{I_n}{I_{n+1}}$ tend vers 1, donc nI_n^2 tend vers $\frac{\pi}{2}$, et donc $\sqrt{n}I_n$ tend vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

8) On raisonne par récurrence.

On a $w_1 = \dfrac{4}{3}$ et d'après 1) et 3) on a $I_2 = \dfrac{\pi}{4}$ et $I_3 = \dfrac{2}{3}$ donc $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_3}{I_2} = \dfrac{4}{3}$ également. On a donc bien $w_1 = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_3}{I_2}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $w_p = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ et montrons que $w_{p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{2p+3}}{I_{2p+2}}$. On a :

$$w_{p+1} = w_p \frac{4(p+1)^2}{4(p+1)^2 - 1} = \frac{\pi}{2}\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}\frac{(2p+2)^2}{(2p+1)(2p+3)}.$$

en utilisant une identité remarquable au dénominateur. Or $I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2} I_{2p}$ et $I_{2p+3} = \dfrac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1}$ donc

$$\frac{I_{2p+3}}{I_{2p+2}} = \frac{\frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1}}{\frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}} = \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}\frac{(2p+2)^2}{(2p+1)(2p+3)}$$

et donc $w_{p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{2p+3}}{I_{2p+2}}$.

L'égalité est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Or d'après la question 5) $\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$, donc la suite (w_p) converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.