Devoir n°19 (non surveillé)

Le but du problème est le calcul de la limite de la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

1) a) Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la majoration :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

b) En déduire que la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée.

c) Démontrer que la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner un majorant de sa limite S.

2) Pour tout réel $\varphi \not\equiv 0\,[\pi]$ on pose $\cot\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

a) Établir la relation :

$$\cot^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi} - 1.$$

b) Montrer que la fonction cot définit une bijection de l'intervalle $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$.

3) a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$e^{in\varphi} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^j (\cos\varphi)^{n-j} (\sin\varphi)^j.$$

b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\cos\varphi)^{2p-2k} (\sin\varphi)^{2k+1},$$

puis que si $\varphi \not\equiv 0\,[\pi]$, on a :

$$\sin\big((2p+1)\varphi\big) = (\sin\varphi)^{2p+1} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\cot^2\varphi)^{p-k}.$$

4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par :

$$P = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}.$$

Pour tout entier $k \in \{1,\ldots,p\}$ on pose $\gamma_k = \cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$.

a) Montrer que les γ_k sont deux à deux distincts, i.e. que si $k \neq k'$ alors $\gamma_k \neq \gamma_{k'}$.

b) Calculer $P(\gamma_k)$ pour tout $k \in \{1,\ldots,p\}$.

c) Combien le polynôme P a-t-il de racines ? Quelles sont ces racines ?

d) En déduire les égalités :

$$\sum_{k=1}^{p} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$$
$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

5) a) Établir, pour tout réel $\varphi \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'encadrement :

$$\sin\varphi < \varphi < \tan\varphi.$$

b) En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 1$, on a l'encadrement :

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}.$$

c) En déduire la valeur de S.

C'est Euler qui a donné en 1734 la première démonstration de la valeur de S. La preuve proposée ici est due à Cauchy (1821).