

## CHAPITRE

## 17

## Interférences à deux ondes

Des interférences se produisent lorsque plusieurs ondes dites “cohérentes” se superposent. Elles se manifestent par une répartition spatiale de l’intensité vibratoire alternant des zones de forte amplitude (interférences constructives) et des zones de faible amplitude (interférences destructives). Elles donnent lieu à de nombreuses applications pratiques : mesures de faibles déplacements, contrôle de l’état de surface d’un matériau, spectroscopie, holographie, observations astronomiques, etc. D’un point de vue fondamental les interférences ont joué un rôle majeur dans l’émergence de la théorie quantique et celle de la relativité restreinte et générale.

- Les expériences d’interférométrie menées par Michelson et Morley entre 1881 et 1887 montrèrent que la mesure de la vitesse de la lumière est indépendante du déplacement de l’appareil de mesure. Cette observation, cohérente avec les lois de l’électromagnétisme de Maxwell mais en contradiction avec le principe de relativité galiléenne en mécanique, contribua à l’émergence de la relativité restreinte.
- Davisson et Germer mirent en évidence de façon spectaculaire, dans une expérience historique menée en 1927, qu’une figure d’interférences peut être obtenue avec des électrons (il s’agissait plus précisément d’une figure de diffraction, la diffraction étant un cas particulier d’interférences). Cette observation confirma le postulat formulé par Louis de Broglie en 1923 selon lequel la matière, comme la lumière, peut se comporter aussi bien de manière ondulatoire que corpusculaire. Ce principe, dit de *dualité onde-corpuscule*, est l’un des plus emblématiques de la théorie quantique.
- Le 11 février 2016 deux interféromètres (Ligo et Virgo) effectuèrent conjointement la première détection d’une onde gravitationnelle. Cela confirma l’existence de ces perturbations de l’espace-temps prévues par la théorie de la relativité générale.

Ce chapitre consiste en une introduction à l’étude mathématique des interférences, dans le cas simple d’une superposition de deux ondes. On développe le formalisme dans un cadre général, puis on s’intéresse au domaine optique avec le montage des trous d’Young.

## 1 Superposition de deux ondes

### 1.1 Critère de cohérence

Deux ondes qui se superposent doivent remplir certaines conditions pour interférer (on dit qu’elles sont “cohérentes”). Les critères de cohérence, notamment dans le domaine optique, ne sont pas au programme de première année. On admet simplement la propriété suivante :

**Critère de cohérence**

Deux ondes cohérentes entre elles sont nécessairement **de même fréquence**.

## 1.2 Influence du déphasage sur la nature des interférences

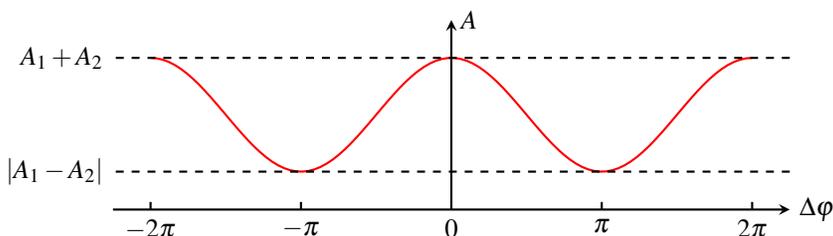
Imaginons deux vibrations sinusoïdales synchrones :

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

qui se superposent pour former une vibration résultante  $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ . Un calcul montre que la vibration résultante est sinusoïdale, de même pulsation  $\omega$ , et d'amplitude  $A$  qui dépend du **déphasage**  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  entre  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} \quad (1)$$

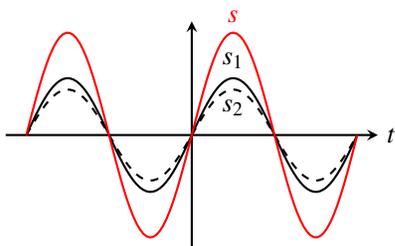
On montre sur le graphe ci-dessous les variations de  $A$  avec le déphasage  $\Delta\varphi$ .



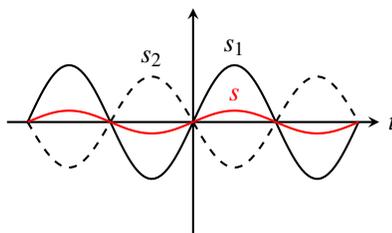
On constate que :

- l'amplitude vibratoire résultante est **maximale** lorsque les deux vibrations sont **en phase**. On parle d'*interférences constructives*.
- À l'inverse l'amplitude vibratoire résultante est **minimale** lorsque les deux vibrations sont **en opposition de phase**. On parle d'*interférences destructives*.

On illustre ces deux cas de figure sur les graphes ci-dessous, montrant les deux vibrations  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  ainsi que la vibration résultante.



Interférences constructives



Interférences destructives

Remarque : Pour une valeur quelconque du déphasage l'amplitude vibratoire résultante prend une valeur intermédiaire, donnée par la relation (1).

Remarque : On utilise de manière un peu abusive le terme de déphasage pour  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  car en pratique un déphasage se mesure en valeur absolue. Pour l'étude des interférences le signe de  $\Delta\varphi$  n'a aucune importance (on peut le définir arbitrairement comme  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  ou bien  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ). En résumé on définit le déphasage  $\Delta\varphi$  dans le sens que l'on veut, sans valeur absolue.

### Déphasage et nature des interférences

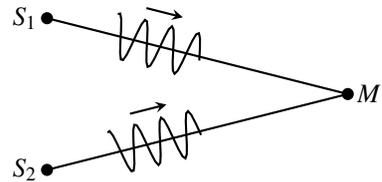
On retient les critères suivants pour les interférences constructives et destructives, exprimés en termes du déphasage :

- les interférences sont constructives si et seulement si les deux vibrations sont **en phase** :  $\Delta\varphi = 0 [2\pi]$  ;
- les interférences sont destructives si et seulement si les deux vibrations sont **en opposition de phase** :  $\Delta\varphi = \pi [2\pi]$  .

## 1.3 Calcul d'un déphasage

### 1.3.1 Position du problème

On considère deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes, situées en  $S_1$  et  $S_2$ . On s'intéresse aux interférences produites par ces sources en un point  $M$  quelconque de l'espace. Pour cela il faut évaluer le déphasage  $\Delta\varphi(M)$  entre les deux ondes lorsqu'elles se superposent en  $M$ .



### 1.3.2 Expression du déphasage dans le cas général

On considère tout d'abord la source située en  $S_1$ . On suppose que la vibration produite par cette source a une amplitude  $A_1$  et une phase à l'origine  $\varphi_{\text{source},1}$  quelconques :

$$s_1(S_1, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{\text{source},1})$$

Comme on l'a vu au chapitre précédent la phase est modifiée du fait que l'onde met un certain temps pour se propager de  $S_1$  jusqu'à  $M$ . En négligeant toute atténuation de l'onde au cours de sa propagation, la vibration au point  $M$  s'écrit :

$$s_1(M, t) = s_1(S_1, t - \tau_1) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{\text{source},1} - \omega\tau_1)$$

avec  $\tau_1$  le **temps de propagation entre  $S_1$  et  $M$** . En pratique il peut apparaître un terme de phase supplémentaire si l'onde change de milieu ou si elle se réfléchit sur un obstacle. Nous considérerons ainsi que la vibration au point  $M$  s'écrit, dans le cas le plus général :

$$s_1(M, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{\text{source},1} - \omega\tau_1 + \varphi_{\text{autre},1})$$

où  $\varphi_{\text{autre},1}$  est un terme de phase supplémentaire éventuel.

**Remarque** : Dans ce chapitre on rencontrera un unique cas de figure où un terme de phase supplémentaire intervient. Cela concerne certaines situations où une onde se réfléchit sur un obstacle et pour lesquelles il faut ajouter terme de phase **égal à  $\pi$** .

De la même manière la source  $S_2$  produit en  $M$  la vibration :

$$s_2(M, t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{\text{source},2} - \omega \tau_2 + \varphi_{\text{autre},2})$$

avec  $\varphi_{\text{source},2}$  la phase à l'origine de la vibration produite en  $S_2$ ,  $\tau_2$  le temps de propagation entre  $S_2$  et  $M$  et  $\varphi_{\text{autre},2}$  un terme de phase supplémentaire éventuel. Nous avons ainsi établi l'expression des deux vibrations en  $M$ , sous la forme :

$$\begin{cases} s_1(M, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1(M)) \\ s_2(M, t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(M)) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_1(M) = \varphi_{\text{source},1} - \omega \tau_1 + \varphi_{\text{autre},1} \\ \varphi_2(M) = \varphi_{\text{source},2} - \omega \tau_2 + \varphi_{\text{autre},2} \end{cases}$$

Par la suite nous définirons arbitrairement le déphasage entre les deux ondes, en  $M$ , par  $\Delta\varphi(M) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M)$ . Il peut être considéré comme la résultante de trois contributions :

$$\Delta\varphi(M) = \Delta\varphi_{\text{sources}} + \Delta\varphi_{\text{prop}} + \Delta\varphi_{\text{autre}}$$

avec :

- $\Delta\varphi_{\text{source}} = \varphi_{\text{source},1} - \varphi_{\text{source},2}$ . Ce terme apparaît si les deux sources **ne vibrent pas en phase**. Il y a alors un déphasage "initial" entre les deux ondes, avant même qu'elles commencent à se propager.
- $\Delta\varphi_{\text{prop}} = -\omega(\tau_1 - \tau_2)$ . Ce terme apparaît **si les ondes mettent des durées différentes pour se propager vers  $M$** .
- $\Delta\varphi_{\text{autre}}$  est un terme produit par d'éventuelles autres sources de déphasage.

### 1.3.3 Cas où seul le terme de propagation intervient

On rencontre souvent la situation où les deux sources vibrent en phase et où il n'y a pas de terme de phase supplémentaire. Dans ce cas  $\Delta\varphi_{\text{sources}} = \Delta\varphi_{\text{autre}} = 0$  et le déphasage au point  $M$  s'écrit :

$$\Delta\varphi(M) = \omega\Delta t(M)$$

avec  $\Delta t(M) = \tau_2 - \tau_1$  la **différence des temps de parcours** entre les deux ondes.

## 1.4 Différence de marche, ordre d'interférence

On définit la différence de marche  $\delta(M)$  et l'ordre d'interférence  $p(M)$  de la manière suivante :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{\Delta t(M)}{T} = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}$$

avec  $\lambda$  la période spatiale (longueur d'onde) et  $T$  la période temporelle de l'onde. On note que  $\delta(M)$  est homogène à une longueur et  $p(M)$  est sans dimension. Dans le cas particulier où les deux ondes se propagent dans le même milieu, avec la même célérité  $c$ , on peut exprimer la différence de marche en fonction des distances ( $S_1M$ ) et ( $S_2M$ ) parcourues :

$$\delta(M) = \frac{\lambda}{T}(\tau_1 - \tau_2) = c \left( \frac{(S_1M)}{c} - \frac{(S_2M)}{c} \right) \implies \delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$$

La différence de marche s'identifie alors à la **différence des distances parcourues**.

Remarque : La distance parcourue est notée  $(S_1M)$  et non  $S_1M$  car l'onde ne se propage pas nécessairement en ligne droite (elle peut être déviée au cours de sa propagation par réflexion, réfraction, diffusion, diffraction par exemple).

Remarque : Si, à cause d'une réflexion, un terme supplémentaire égal à  $\pi$  intervient dans la phase d'une onde, cela est équivalent à **ajouter la quantité  $\frac{\lambda}{2}$  à la distance parcourue**.

Exemple : Il y a une réflexion entre  $S_2$  et  $M$  qui produit un déphasage égal à  $\pi$ . En revanche il n'y a pas de réflexion entre  $S_1$  et  $M$ . On écrira :

$$\delta(M) = (S_2M) + \frac{\lambda}{2} - (S_1M)$$

## 1.5 Nouveaux critères d'interférences

### Différence de marche et nature des interférences

Interférences constructives ssi  $\delta(M)$  est un **multiple entier de  $\lambda$**  :  $\delta = 0 [\lambda]$  ;

Interférences destructives ssi  $\delta(M)$  est un **multiple demi-entier de  $\lambda$**  :  $\delta = \frac{\lambda}{2} [\lambda]$ .

### Ordre d'interférence et nature des interférences

Interférences constructives ssi  $p(M)$  est un **entier** :  $p = 0 [1]$  ;

Interférences destructives ssi  $p(M)$  est un **demi-entier** :  $\delta = \frac{1}{2} [1]$ .

## 1.6 Bilan

Pour déterminer la nature des interférences entre deux ondes qui se superposent en un point  $M$  de l'espace, **il faut calculer le déphasage  $\Delta\varphi(M)$  entre ces deux ondes**. On se pose alors les questions suivantes :

- Les deux sources émettent-elles en phase ?
- Quels sont les chemins parcourus par les deux ondes ?
- Y a-t-il une réflexion sur un obstacle qui ajoute un terme de phase supplémentaire ?

En pratique on verra le plus souvent des situations où les deux sources émettent en phase et produisent des ondes qui se propagent dans le même milieu. Il est alors plus intéressant de raisonner avec la différence de marche et l'ordre d'interférence plutôt qu'avec le déphasage.

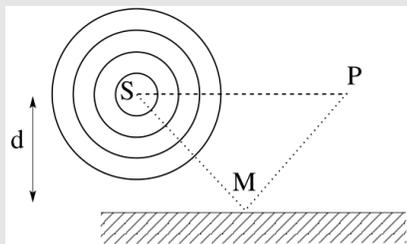
Remarque : On étudiera de manière spécifique le cas des interférences lumineuses, dans la deuxième partie. On introduira le concept de **chemin optique**, qui permet d'exprimer une différence de marche en fonction de l'indice de réfraction des milieux traversés.

**En résumé**

- Vérifier que les deux sources émettent en phase (c'est notamment le cas si les deux ondes sont issues de la même source mais prennent des chemins différents pour atteindre la zone d'interférences) ;
- Calculer la différence de marche  $\delta = (S_2M) - (S_1M)$ . Ajouter  $\frac{\lambda}{2}$  à la distance parcourue si une réflexion produit un déphasage égal à  $\pi$  ;
- Calculer l'ordre d'interférence  $p = \frac{\delta}{\lambda}$  puis conclure quant à la nature des interférences, suivant que  $p$  est un entier (constructives), un demi-entier (destructives), ou autre (état intermédiaire).

**Exemple**

Une pointe vibrante crée des ondes circulaires, de longueur d'onde  $\lambda = 1,2 \text{ cm}$ , à la surface d'une cuve à ondes. Ces ondes se réfléchissent sur un obstacle plan supposé très long. Le point S et le point P sont à la même distance  $d = 8,7 \text{ cm}$  de l'obstacle et séparés d'une distance  $SP = 2d$ .



Décrire la nature des interférences au point P sachant que la réflexion sur le plan s'accompagne d'un déphasage égal à  $\pi$ .

► **Vérifier que les sources émettent en phase**

Dans ce montage la source S est unique. Les interférences se produisent car les ondes peuvent atteindre P par deux chemins différents : propagation rectiligne ou bien réflexion sur l'obstacle. Dans cette situation il n'y a pas de déphasage initial entre les sources.

► **Calculer la différence de marche**

La distance parcourue par l'onde qui suit le chemin direct vaut SP et celle parcourue par l'onde qui se réfléchit vaut SM + MP. En tenant compte du déphasage de  $\pi$  dû à la réflexion, la différence de marche en P vaut :  $\delta(P) = SM + MP + \frac{\lambda}{2} - SP$ . La réflexion suit les lois de Descartes donc M est équidistant de S et P. On en déduit, d'après le théorème de Pythagore et puisque  $SP = 2d$ , que  $SM = MP = d\sqrt{2}$ . Au final :  $\delta(P) = 2d\sqrt{2} - 2d + \frac{\lambda}{2}$ .

► **Calculer l'ordre d'interférence et conclure**

On trouve numériquement : 
$$p(P) = \frac{\delta(P)}{\lambda} = 2(\sqrt{2} - 1) \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{2} = 6,5.$$

L'ordre d'interférence est un demi-entier donc **les interférences sont destructives en P.**

**Application 1**

Un haut-parleur  $S$  produit une onde acoustique sinusoïdale de fréquence  $f = 170\text{Hz}$  et d'amplitude  $A$ . Elle se propage le long d'un axe  $(Ox)$  avant de se réfléchir sur une paroi rigide située en  $x = 0$ . La réflexion s'accompagne d'un déphasage de  $\pi$ . Un microphone  $M$  supposé ponctuel est situé entre le haut-parleur et la paroi. La célérité des ondes acoustiques dans l'air vaut  $c = 340\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



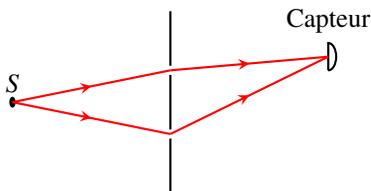
Montrer que l'intensité acoustique mesurée par le microphone s'annule périodiquement le long de l'axe  $(Ox)$ . Déterminer littéralement et numériquement la période spatiale  $i$  de ces annulations, appelée *interfrange*. Expliquer pourquoi on pouvait s'attendre à ce résultat.

## 2 Interférences lumineuses

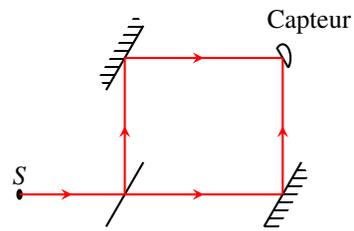
### 2.1 Montages à division du front d'onde ou à division d'amplitude

On admet que les interférences lumineuses ne peuvent s'observer qu'à condition que les deux ondes qui interfèrent **soient issues de la même source**. Par conséquent il n'y aura jamais de déphasage initial entre les sources dans le domaine optique. Concrètement, il y a deux façons différentes de produire des interférences entre deux ondes lumineuses issues de la même source.

- On parle de montage à *division du front d'onde* lorsque l'on fait interférer deux rayons lumineux ayant suivi des chemins différents depuis la source. Le montage des trous d'Young en est un exemple.
- On parle de montage à *division d'amplitude* lorsqu'on utilise un unique rayon issu de la source, que l'on sépare en deux rayons distincts à l'aide d'une lame semi-réfléchissante. L'interféromètre de Michelson en est l'exemple le plus emblématique, il est au programme de deuxième année. On peut également citer l'interféromètre de Mach-Zender.



Trous d'Young  
Montage à division du front d'onde



Interféromètre de Mach-Zender  
Montage à division d'amplitude

## 2.2 Chemin optique

### Chemin optique entre deux points

On considère un rayon lumineux qui se propage d'un point  $A$  vers un point  $B$ . Le chemin optique entre ces deux points est défini par :

$$(AB) = \tau_{AB} \times c$$

avec  $\tau_{AB}$  le temps de propagation entre  $A$  et  $B$ , et  $c$  la célérité de la lumière dans le vide. Le chemin optique est **homogène à une longueur** mais c'est une grandeur qui mesure **le temps de propagation d'une onde lumineuse entre deux points**.

On retient les propriétés suivantes :

- Dans un milieu homogène transparent et isotrope d'indice de réfraction  $n$  le chemin optique vaut :  $(AB) = nL_{AB}$ , avec  $L_{AB}$  la distance parcourue entre  $A$  et  $B$ .
- Si le rayon est réfracté (donc change de milieu), on additionne les chemins optiques dans chacun des milieux.
- Certaines réflexions modifient la phase de l'onde lumineuse de  $\pi$ . Cela est équivalent à **rajouter**  $\frac{\lambda}{2}$  au chemin optique, avec  $\lambda$  la longueur d'onde *dans le vide* de l'onde lumineuse.

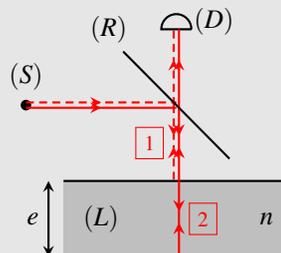
### Chemin optique et différence de marche

Soient deux ondes lumineuses issues de la même source  $S$  et interférant en un point  $M$  après avoir suivi des chemins différents (notés 1 et 2). La différence de marche entre ces deux ondes, au point  $M$ , vaut :

$$\delta(M) = (SM)_{\text{chemin 2}} - (SM)_{\text{chemin 1}}$$

### Exemple

Une source ponctuelle monochromatique ( $S$ ) de longueur d'onde  $\lambda$  éclaire sous incidence normale, par l'intermédiaire d'une lame semi-réfléchissante ( $R$ ), une lame à faces parallèles ( $L$ ) d'indice de réfraction  $n$  et d'épaisseur  $e$ . Une partie de la lumière se réfléchit sur la face avant de ( $L$ ) (rayon 1) tandis qu'une autre, réfractée, effectue un aller-retour dans ( $L$ ) avant d'émerger par la face avant (rayon 2).



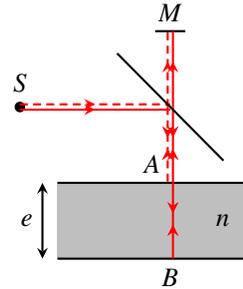
On néglige les ondes issues d'autres réflexions à l'intérieur de  $(L)$ . Un détecteur  $(D)$  enregistre le signal lumineux issu de la superposition des rayons 1 et 2. On admet que la réflexion sur la face avant de  $(L)$  produit un déphasage de  $\pi$  tandis que la réflexion sur la face arrière ainsi que les réfractions ne produisent pas de déphasage.

Calculer la différence de marche entre les deux rayons au niveau du détecteur.

► **Calculer une différence de marche**

On annote le schéma. Les rayons sont issus de  $S$ , le rayon 1 se réfléchit en  $A$  sur la face avant et le rayon 2 en  $B$  sur la face arrière. Ils interfèrent au point  $M$  de l'écran. La différence de marche s'écrit  $\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1$ . Il est possible de simplifier cette différence de marche car les chemins optiques ont des termes en commun :

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (SABAM) - (SAM) \\ &= [(SA) + (ABA) + (AM)] - [(SA) + \frac{\lambda}{2} + (AM)] \\ &= (ABA) - \frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

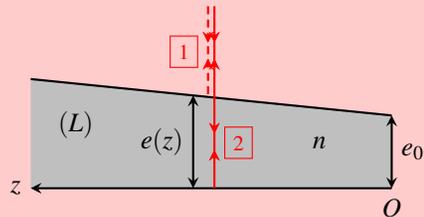


Le rayon 2 parcourt une distance  $2e$  dans la lame d'indice  $n$  donc  $(ABA) = 2ne$  et :

$$\delta(M) = 2ne - \frac{\lambda}{2}$$

**Application 2**

On reprend le montage de la question précédente. On considère désormais que les deux faces de la lame  $(L)$  ne sont pas parallèles mais forment entre elles un petit angle  $\alpha$ . Ainsi l'épaisseur locale  $e(z)$  de cette lame varie en fonction de la coordonnée  $z$  (voir figure ci-contre).



On suppose que l'angle  $\alpha$  est suffisamment faible pour considérer en première approximation que les rayons arrivent sous incidence normale sur les deux faces de  $(L)$ . On peut donc conserver l'expression de la différence de marche obtenue dans l'exercice précédent, avec l'épaisseur locale  $e(z)$ . On note  $e_0$  l'épaisseur en  $z = 0$ .

1. Exprimer l'épaisseur locale  $e(z)$  en fonction de  $e_0$ ,  $z$  et  $\alpha$ . On fera les approximations classiques concernant les faibles angles.
2. On déplace le détecteur parallèlement à  $(Oz)$ . Montrer que l'intensité lumineuse s'annule périodiquement et exprimer l'interfrange  $i$  en fonction de  $n$ ,  $\lambda$  et  $\alpha$ .
3. On donne  $n = 1,4$  et  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . On mesure  $i = 2,5 \text{ mm}$ . Calculer  $\alpha$ .

On réalise l'expérience avec un film de savon orienté de sorte que l'axe  $(Oz)$  soit vertical. On souhaite étudier l'influence de la gravité sur l'épaisseur  $e(z)$  du film. L'image ci-contre montre la figure d'interférences obtenue en regardant la lame de savon de face.

4. En vous appuyant sur le résultat de la question 2, expliquer lequel des deux profils (voir ci-dessous) correspond à la figure d'interférences observée.

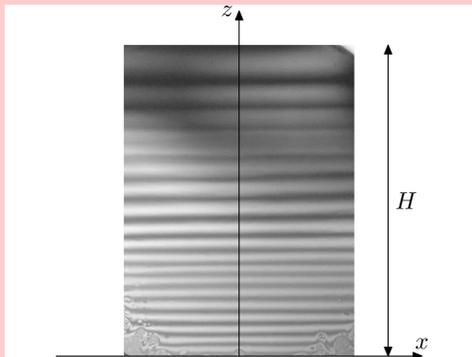
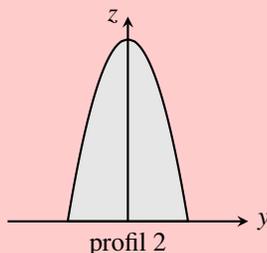
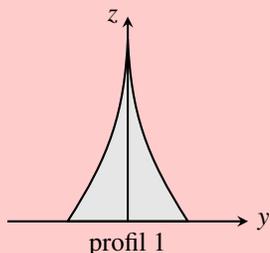


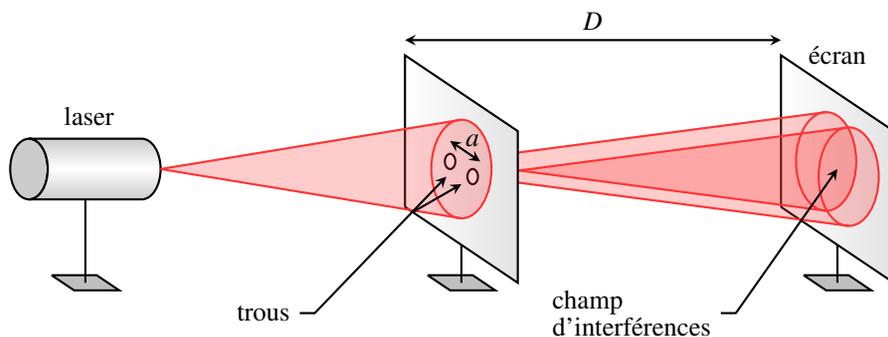
Figure 6 Vue de face de la lame de savon



## 2.3 Montage des trous d'Young

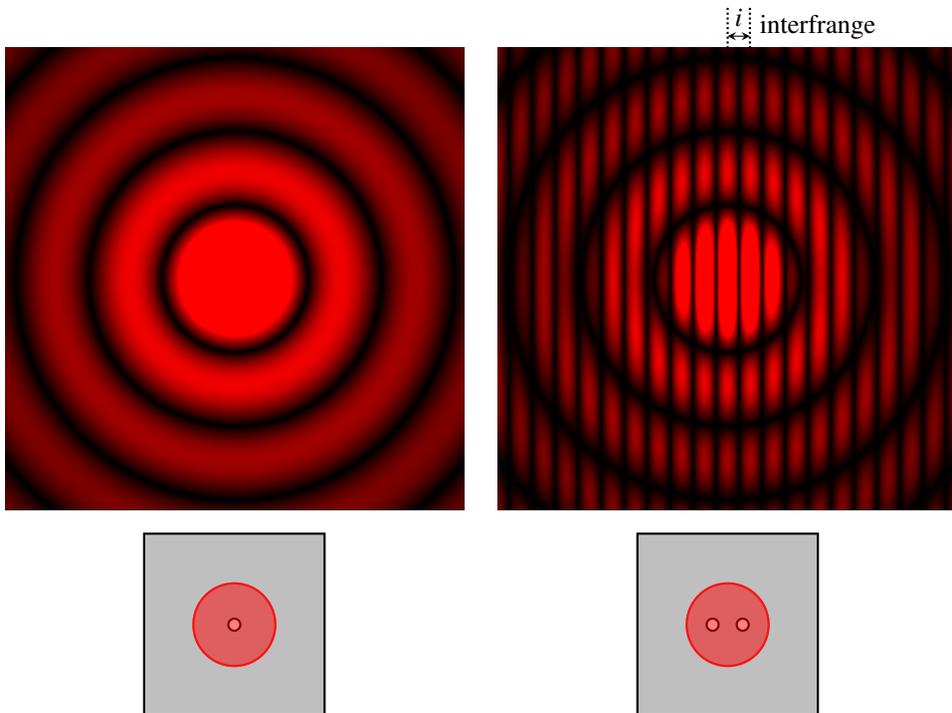
### 2.3.1 Schéma du montage

Un faisceau laser éclaire un plan percé de deux trous de petit diamètre, distants de  $a$ , appelés *trous d'Young*. Chacun d'entre eux diffracte la lumière incidente, de sorte que les deux faisceaux émergents peuvent se recouvrir sur un écran éloigné d'une distance  $D \gg a$  du plan des trous. On admet que les faisceaux issus des deux trous sont cohérents entre eux, ce qui permet d'observer une figure d'interférences sur l'écran.



### 2.3.2 Observations

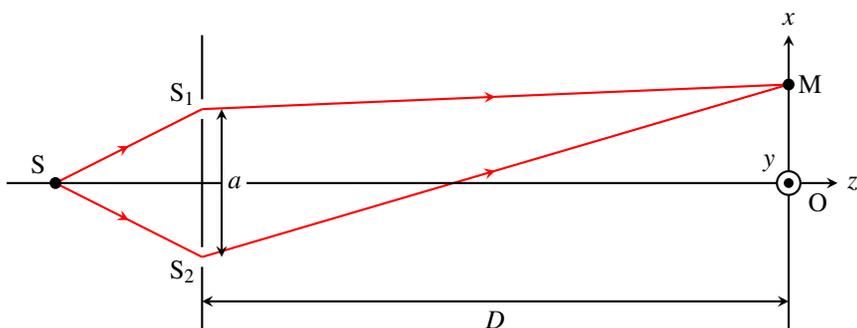
On montre ci-dessous (à gauche) la figure de diffraction obtenue sur l'écran lorsque le plan est percé d'un unique trou, puis (à droite) la figure d'interférences observée avec deux trous.



Un trou unique produit une figure de diffraction caractérisée par des anneaux concentriques. En présence de deux trous on retrouve une figure de diffraction semblable, à laquelle se superpose des franges d'interférences rectilignes orientées perpendiculairement à la direction des trous (par exemple ici les deux trous sont placés à l'horizontale et les franges sont verticales).

### 2.3.3 Modélisation, formule de Fresnel

On modélise schématiquement le système de la manière suivante :



- La source  $S$  est supposée ponctuelle, située à égale distance des deux trous, et monochromatique (longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ ).
- On suppose que l'ensemble du montage est plongé dans l'air dont l'indice est égal à 1.
- Les centres des deux trous, notés  $S_1$  et  $S_2$ , sont distants de  $a$ .
- On regarde la figure d'interférences sur un écran situé à grande distance :  $D \gg a$ .
- On utilise le repère cartésien  $(Oxyz)$  avec l'origine au centre de l'écran. On repère un point  $M$  de l'écran par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . On considère un point proche de l'axe :  $|x| \ll D$  et  $|y| \ll D$ .

On note  $I_0$  l'intensité lumineuse observée sur l'écran dans le cas d'un trou unique. En pratique elle dépend des coordonnées  $(x, y)$  puisque l'on observe des anneaux de diffraction, mais pour simplifier nous la supposons uniforme.

#### Formule de Fresnel

En admettant que l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude vibratoire, et avec la relation (1) (voir paragraphe 1.2), on peut établir la **formule de Fresnel** qui donne l'intensité lumineuse en un point  $M$  du champ d'interférences, en fonction de la différence de marche  $\delta(M)$  :

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) \right) \right]$$

#### 2.3.4 Différence de marche, interfrange

##### En résumé

- Simplifier l'expression de la différence de marche en utilisant les symétries du problème ;
- Écrire les coordonnées des points  $S_1$ ,  $S_2$  et  $M$  dans le repère d'étude ;
- Calculer les distances  $S_1M$  et  $S_2M$  et simplifier leur expression avec le développement au premier ordre suivant : si  $|\varepsilon| \ll 1$  alors pour tout réel  $\alpha$  :  $(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ .
- En déduire une expression approchée de  $\delta(M)$  ;
- Écrire les conditions d'interférences constructives et en déduire la position des franges claires.
- Déterminer la période spatiale des franges (il s'agit de l'interfrange) ;
- Éventuellement utiliser l'expression approchée de  $\delta(M)$  pour exprimer l'intensité lumineuse en tout point de l'écran grâce à la formule de Fresnel.

► **Calculer la différence de marche pour le montage des trous d'Young**

La différence de marche est :  $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$ . On la simplifie compte tenu du fait que l'indice du milieu est égal à 1 et que la source est équidistante des deux trous, donc  $(SS_1) = (SS_2)$  :

$$\delta(M) = [(SS_2) + (S_2M)] - [(SS_1) + (S_1M)] = S_2M - S_1M$$

On calcule les distances  $S_1M$  et  $S_2M$ . Pour cela on commence par déterminer les coordonnées des points suivants :  $S_1(\frac{a}{2}, 0, -D)$ ,  $S_2(-\frac{a}{2}, 0, -D)$  et  $M(x, y, 0)$ . On écrit ensuite :

$$S_1M = \|\vec{S_1M}\| = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2}}$$

On a supposé la distance  $D$  très supérieure à  $|x|$ ,  $|y|$  et  $a$  donc on peut écrire :  $S_2M = D(1 + \varepsilon)^{1/2}$ , avec  $\varepsilon = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2} \ll 1$ . On simplifie cette expression au premier ordre :

$$S_1M \simeq D \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2} \right) = D + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D}$$

De la même manière on peut écrire :

$$S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \simeq D + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D}$$

On conclut :

$$\delta(M) = S_2M - S_1M = \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D} \iff \boxed{\delta(M) = \frac{ax}{D}}$$

► **Équation des franges d'interférences, interfrange**

Les interférences sont constructives à condition que :

$$\delta(M) = 0 \text{ } [\lambda] \iff \frac{ax}{D} = 0 \text{ } [\lambda] \iff \boxed{x = 0 \left[ \frac{\lambda D}{a} \right]}$$

Les franges claires sont les droites d'équation  $x = p \frac{\lambda D}{a}$ , avec  $p \in \mathbb{Z}$ . **Les franges d'interférences sont des droites parallèles à l'axe** ( $Oy$ ). L'interfrange correspond à la période spatiale des franges, que l'on identifie à l'intérieur du modulo dans l'expression encadrée ci-dessus :

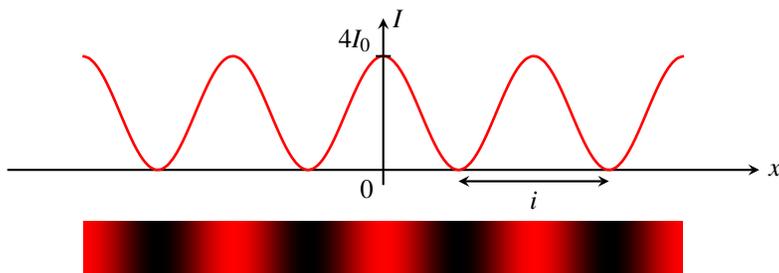
$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

► **Intensité lumineuse**

On exprime l'intensité lumineuse en tout point de l'écran à l'aide de la formule de Fresnel :

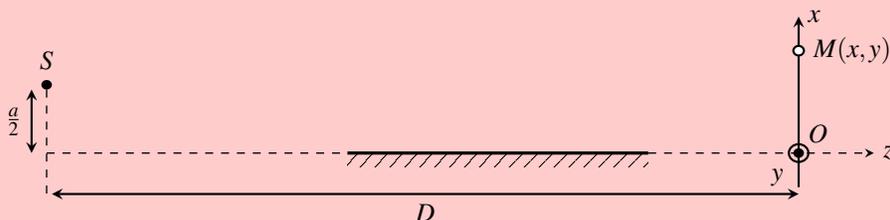
$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$

On trace l'allure de  $I$  en fonction de  $x$  :



**Application 3**

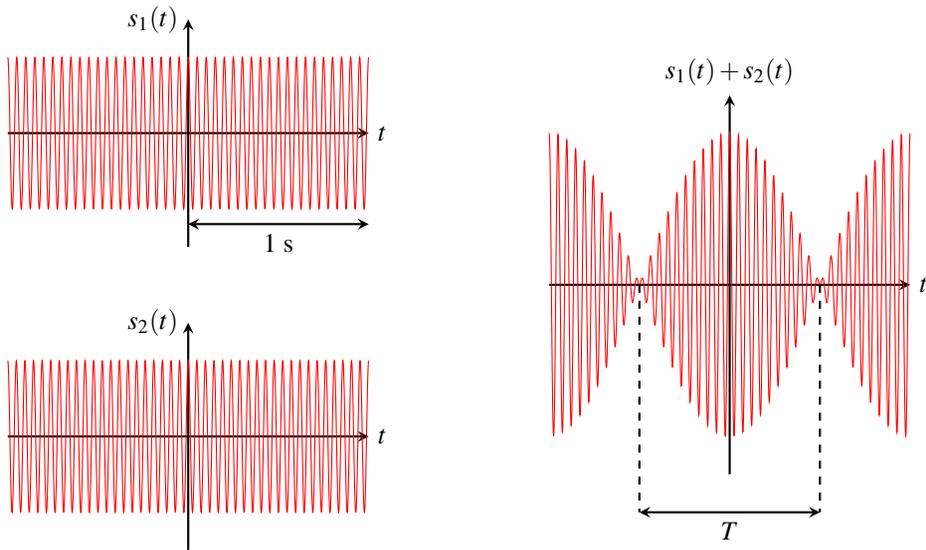
On considère un dispositif interférentiel constitué d'un miroir plan, éclairé sous incidence rasante. Un point source  $S$ , situé à la distance  $a/2$  du plan du miroir, émet une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . On étudie les interférences dans le plan  $(Oxy)$  situé à la distance  $D$  de la source. On se place dans le cas où  $D \gg a$ ,  $D \gg |x|$  et  $D \gg |y|$ . On admet que la réflexion d'un rayon lumineux sur le miroir plan produit un déphasage de  $\pi$ . L'ensemble du montage est plongé dans l'air d'indice 1.



1. Expliquer pourquoi il est possible d'observer des interférences sur l'écran. Représenter notamment la marche de deux rayons lumineux qui interfèrent en un point de l'écran. Indiquer quelles sont les frontières du champ d'interférences.
2. Placer sur la figure l'image  $S'$  de la source  $S$  par le miroir plan. Justifier que d'un point de vue optique le montage est équivalent à celui des trous d'Young.
3. Calculer la différence de marche en un point  $M$  de l'écran. En déduire l'expression de l'interfrange  $i$ . AN :  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $D = 80 \text{ cm}$ ,  $a = 1,0 \text{ mm}$ . Calculer  $i$ .
4. Exprimer l'intensité lumineuse  $I(M)$  en tout point de l'écran. On note  $I_0$  l'intensité lumineuse sur l'écran, supposée uniforme, en l'absence du miroir.

### 3 Battements

Les battements se produisent lorsque deux ondes se superposent en ayant des fréquences différentes mais proches. Dans ce cas l'amplitude vibratoire n'est plus modulée dans l'espace mais **dans le temps**. On illustre le principe avec les signaux suivants, de fréquences  $f_1 = 20\text{ Hz}$  et  $f_2 = 21\text{ Hz}$ .



Un détecteur placé en un point quelconque de l'espace enregistre un signal dont **l'amplitude vibratoire oscille périodiquement au cours du temps**. On note  $T_{\text{batt}}$  la période des battements et  $f_{\text{batt}} = 1/T_{\text{batt}}$  la fréquence des battements.

#### Fréquence des battements

La superposition de deux ondes de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  proches produit des battements caractérisés par :

$$f_{\text{batt}} = |f_2 - f_1|$$

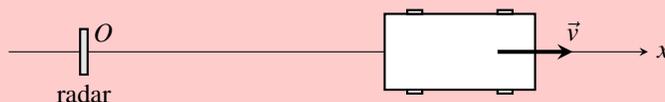
Remarque : Les fréquences sont proches si  $|f_2 - f_1| \ll f_1$  et  $|f_2 - f_1| \ll f_2$ .

L'exemple ci-dessus montre des battements de période  $T_{\text{batt}} = 1\text{ s}$ , c'est-à-dire de fréquence  $f_{\text{batt}} = 1\text{ Hz}$ , ce qui correspond effectivement à la différence  $f_2 - f_1$ .

On utilise les battements pour mesurer des petits écarts de fréquence. On peut par exemple accorder entre eux deux instruments en leur faisant jouer la même note. Plus les battements sont lents (fréquence faible) et plus l'accord est proche. Les instruments sont accordés entre eux lorsque l'on n'entend plus de battement.

**Application 4**

On étudie le principe de fonctionnement d'un radar à effet Doppler. Un véhicule se déplace le long d'un axe  $(Ox)$  à la vitesse constante  $\vec{v} = v\vec{u}_x$ . Le radar est fixe et placé à l'origine. Il produit un signal électromagnétique  $s_i(O, t) = A \cos(\omega_1 t)$ . On suppose que le véhicule croise le radar à la date  $t = 0$ . On admet que l'onde électromagnétique est déphasée de  $\pi$  lorsqu'elle se réfléchit sur le véhicule. La célérité des ondes électromagnétiques dans l'air vaut  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



1. Déterminer la position du véhicule  $x_v(t)$ .

On souhaite déterminer l'écho  $s_r(O, t)$  reçu par le radar à la date  $t$ .

2. Déterminer, pour un écho qui revient au radar en  $t$ , la date  $t'$  à laquelle le signal s'est réfléchi sur le véhicule, puis la position  $x_v(t')$ . On exprimera  $t'$  en fonction de  $t$ ,  $v$  et  $c$ .
3. Montrer que l'écho reçu par le radar prend la forme :

$$s_r(O, t) = -A \cos(\omega_2 t) \quad \text{avec} \quad \omega_2 = \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \omega_1$$

4. La vitesse du véhicule est très faible devant  $c$ . Simplifier l'expression de  $\omega_2$  avec un développement au premier ordre en  $v/c$ . Exprimer le décalage en fréquence  $\Delta f = f_1 - f_2$ .
5. Le radar émet un signal de fréquence  $f_1 = 24,125 \text{ GHz}$  et enregistre des battements de fréquence  $f_{\text{batt}} = 5,0 \text{ kHz}$ . Calculer la vitesse du véhicule en  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ .